PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. 1. September 1911. Redaktionsschluß für No. 18 am 1. September 1911. 12. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

E. Wiechert, Relativitätsprinzip und Äther. I. S. 689.

L. W. Mc Keehan, Die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner Kugeln in Luft bei vermindertem Druck. S. 707.

Ch. Füchtbauer, Über eine Methode zur Untersuchung von Absorptionslinien mit dem Stufengitter und über die Veränderung von Absorptionslinien durch fremde Gase. S. 722.

E. Budde, Das Dopplersche Prinzip für bewegte Spiegel und ein Versuch von Klinkerfues. S. 725.

Physikalische Technik:

F. Bock, Einige neue Apparate der Cambridge Scientific Instrument Company. S. 729.

Fr. A. Aust, Ein veränderlicher großer Widerstand aus Tusche auf Papier. S. 732.

W. Volkmann, Kleine Verbesserungen an Schieberwiderständen. S. 733.

W. Volkmann, Neue Klemmenformen. S. 734.

W. Volkmann, Zwei Ablesemikroskope. S. 734.

Besprechungen:

M. Rózsa, Neuere Daten zur Kenntnis der warmen Salzseen. S. 735.

Tagesereignisse. S. 736.

Personalien. S. 736.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Relativitätsprinzip und Äther. I.

Von E. Wiechert[1]).

Inhaltsübersicht: § 1. Vorwort. — I. Teil. Mathematische Vorbereitungen: § 2. Bezeichnungen; § 3. Lorentz-Transformation für Raum und Zeit; § 4. Eigenzeit und Punktmechanik; § 5. Kontinuum; § 6. Ausbreitung von Erregungen; § 7. Elektrodynamische Probleme. — II. Teil. Relativitätsprinzip, Äther und Raum-Zeit-Anschauung: § 8. Relativitätsprinzip gegen Äther; § 9. Relativitätsgesetze. Bedingtes und unbedingtes Relativitätsprinzip; § 10. Vorbemerkungen über die Begriffe von Raum und Zeit; § 11. Raum-Zeit-Systeme; § 12. Scheinbare Längenänderungen bei Änderungen der Schreitung; § 13. Symmetrische Raum-Zeit-Systeme; § 14. Gruppe der symmetrischen Raum-Zeit-Systeme; § 15. Grenzschreitungen, Äther; § 16. Schreitung und Geschwindigkeit des Geschehens; § 17. Elektrodynamische Erscheinungen; § 18. Grenzen der Relativitätsgesetze; § 19. Äther und Materie; § 20. Relativitätsgesetze und Raum-Zeit-Systeme; § 21. Physikalische Gleichzeitigkeit; § 22. Raum-Zeit-Vorstellung.

§ 1. Vorwort.

Die Molekulartheorie feiert zurzeit Triumphe, wie kaum je in vergangenen Zeiten. Es hat sich gezeigt, daß nicht nur die Materie, sondern auch die Elektrizität molekular beschaffen ist. Man hat gelernt, die molekularen Teilchen einzeln zu fassen, und es ist so gelungen, ihre Zahl mit großer Schärfe festzustellen. Einzelne Autoren verlangen sogar, daß man auch der Energie molekulare Struktur zuschreibe. Ein inniger Zusammenhang zwischen Molekulartheorie und Wärmestrahlung ist aufgedeckt worden. Unter der Leitung der Molekulartheorie ist eine Fülle von neuen Gesetzen entdeckt worden. — Und doch hat ein großer Teil der heutigen Physiker noch Zeiten erlebt, wo die Meinung vielfach vertreten wurde, die Molekulartheorie habe abgewirtschaftet, sei unfruchtbar geworden, man stehe an der Schwelle einer Zeit, wo energetische Betrachtungen an ihre Stelle treten würden. —

Jetzt ist die Reihe, totgesagt zu werden, an dem „Äther", der freilich schon oftmals Gegenstand heftiger Angriffe gewesen ist. N. Campbell[1]) schreibt: „Die Darlegung, daß es um die Sache des Äthers gerade da lächerlich schwach bestellt ist, wo man sie am sichersten begründet glaubte, und daß die Äthervorstellung niemals etwas anderes als die Quelle von Irrtümern und Gedankenverwirrung gewesen ist, mag dazu dienen, ihre Überführung zu jenem Kehrichthaufen zu beschleunigen, wo schon der „Phlogiston" und der „Wärmestoff" modern." —

Diejenige Auffassung der Naturgesetze, welche dazu bestimmt sein soll, die Äthervorstellung zu beseitigen, ist das „Prinzip der Relativität". — Den Anstoß zu seiner Aufstellung gab der negative Erfolg des berühmten Experiments von Michelson, welches die Bewegung der Erde relativ zum Äther zeigen sollte. Im Anschluß daran untersuchte H. A. Lorentz, welche Annahmen über die Naturgesetze zu machen seien, damit allgemein die Bewegung relativ zum Äther der Beobachtung entgehe. Er fand, daß für die elektrodynamischen Vorgänge bei Zugrundelegung der von ihm entwickelten Theorie der Elektrodynamik die Hinzunahme jener Hypothese über die Kontraktion bewegter Körper genügt, die man heute die „Lorentz-Fitzgeraldsche Hypothese" zu nennen pflegt. Für die anderen Naturkräfte muß man ein ähnliches Verhalten annehmen wie für die Kräfte elektromagnetischen Ursprungs. Der Schwerkraft insbesondere muß

1) Mündliche Berichte über einzelne Teile der vorliegenden Arbeit wurden in Göttingen gegeben: in der Kgl. Ges. d. Wiss. am 25. März d. J., in der Physik. Ges. am 17. Mai, in der Math. Ges. am 23. Mai.

1) N. Campbell, Phil. Mag. Lond. **19**, 181—191, 1910; Zitat von S. 190 in Übersetzung.

eine Fortpflanzung mit Lichtgeschwindigkeit zugeschrieben werden. H. A. Lorentz zeigte auch, daß die Zeitauffassung eines Beobachters beeinflußt wird, der sich zugleich mit dem Körpersystem durch den Äther bewegt. Es ergibt sich eine „Ortszeit", die von der im ruhenden Äther beurteilten wirklichen Zeit verschieden ist.

Hieran knüpfte A. Einstein[1]) an, indem er für die Naturerscheinungen in der folgenden Hypothese ein fundamentales Gesetz aufstellte: „Die Naturgesetze sind unabhängig vom Bewegungszustand des Bewegungssystems, wenigstens falls letzterer ein beschleunigungsfreier ist." Für diese Hypothese wählte er den Namen „Prinzip der Relativität". Wesentlich ist bei A. Einstein eine neue Auffassung des Zeitbegriffs. Für H. A. Lorentz war die „Ortszeit" im bewegten Koordinatensystem ein Hilfsbegriff. Nach A. Einstein soll nun keines der Koordinatensysteme vor dem anderen ausgezeichnet sein, die „Ortszeit" muß also als „Zeit" schlechthin definiert werden. So ergibt sich eine innere Abhängigkeit des Zeitbegriffs von der Raumanschauung. —

H. Minkowski[2]) hat das Prinzip der Relativität in ein außerordentlich elegantes mathematisches System gebracht, in dem er die Zeit als eine vierte neue Weltkoordinate den drei Raumkoordinaten gleichstellte. Der Übergang von einem Raumkoordinatensystem zu einem relativ dagegen bewegten, wobei nach H. A. Lorentz ein neues System der „Ortszeit" hinzugenommen werden muß, wird für H. Minkowski zu einer einfachen Koordinatentransformation in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt, wobei auch die Zeit eine neue „Achse" erhält. In wissenschaftlicher Begeisterung sagt er über die neuen Vorstellungen von der Verkettung der Begriffe von Raum und Zeit[3]): „Von Stund' an sollen Raum und Zeit zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren". -

Bei der Entwicklung des Prinzips der Relativität wird von A. Einstein die Äthervorstellung abgelehnt. Denn da es für die Beurteilung des Weltgeschehens ohne Bedeutung sein soll, auf welches der verschiedenen in relativer Bewegung begriffenen Koordinatensysteme man sich bezieht, darf ein gegenständlicher Äther nicht angenommen werden: ein solcher würde ja zur Auszeichnung desjenigen Koordinatensystems führen, welches in ihm ruht. —

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 891, 1905; Jahrb. d. Radioaktivität u. d. Elektronik **4**, 411—462, 1908.

2) H. Minkowski, Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen aus dem Jahre 1908, S. 53—111.

3) H. Minkowski, diese Zeitschr. **10**, 104—111, 1909; Zitat von S. 104.

Im Herbst vorigen Jahres hatten wir in Göttingen die Freude, eine Reihe von Vorträgen von Prof. H. A. Lorentz zu hören über die neuere theoretische Forschung in der Elektrodynamik und in bezug auf die Wärmestrahlung. Eine fast wörtliche Wiedergabe dieser Vorträge findet sich im vorigen Jahrgange dieser Zeitschrift[1]). H. A. Lorentz trat für die Existenz des Äthers ein; aber er ließ das Relativitätsprinzip als möglich gelten. In der zitierten Wiedergabe der Vorträge, S. 1236, heißt es: „Wenn nun das Relativitätsprinzip in der Natur allgemeine Gültigkeit hätte, so würde man allerdings nicht in der Lage sein, festzustellen, ob das gerade benutzte Bezugssystem jenes ausgezeichnete ist. Man kommt also dann zu denselben Resultaten, wie wenn man im Anschluß an Einstein und Minkowski die Existenz des Äthers und der wahren Zeit leugnet und alle Bezugssysteme als gleichwertig ansieht. Welcher der beiden Denkweisen man sich anschließen mag, bleibt wohl dem einzelnen überlassen." — Auch mir scheint es sehr wohl möglich, daß die schönen Relativitätsgesetze in einem gewissen Umfang der Wirklichkeit entsprechen könnten; ja, ich glaube, daß nach den Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit dafür sehr groß ist. Ich bin aber der Meinung, daß diese Gesetze nicht nur nicht gegen die Ätherhypothese sprechen, sondern gerade umgekehrt sehr wichtige neue Anzeichen für das Bestehen des Äthers bringen. Das zu zeigen ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Im folgenden werde ich demgemäß die Gültigkeit der Relativitätsgesetze, wenigstens bei Ausschluß der Gravitation, annehmen. In den Gesetzen wird jedoch nicht ein grundlegendes Prinzip für das Weltgeschehen gesehen werden, sondern nur eine innerhalb gewisser Grenzen gültige Folge der Verkettung von Äther und sinnlich wahrnehmbarer Materie.

Sehr gern erkenne ich die hohe erkenntnistheoretische Bedeutung der durch das Relativitätsprinzip angeregten Untersuchungen über den Zeitbegriff an; der Schluß, zu dem ich mich genötigt sehe, ist aber doch der, daß die Gleichwertigkeit der verschiedenen Zeitsysteme nur praktisch und nur innerhalb gewisser Grenzen besteht, keineswegs aber für das Weltgeschehen im allgemeinen behauptet werden darf. —

Die schönen mathematischen Entwicklungen des leider so früh dahingegangenen Göttinger Kollegen und Freundes H. Minkowski werden durch das, was ich zu sagen habe, in ihrer Bedeutung nicht vermindert. Ja, ich meine, daß das Vermächtnis, welches wir H. Minkowski

1) H. A. Lorentz, diese Zeitschr. **11**, 1234, 1910.

verdanken, nur noch mehr zur Geltung kommen wird, wenn man zu weitgehende Folgerungen vermeidet. —

Die Sorge um den Ausdruck hat mich veranlaßt, ein Wort neu zu bilden: „die Schreitung". Damit soll ein Begriff kurz gekennzeichnet werden, der für die hier notwendigen Untersuchungen von der äußersten Wichtigkeit ist. Ein Punkt im Raum, der keine Beschleunigung im Sinne der Mechanik zeigt, gibt eine bestimmte „Schreitung" an. Ein System von Punkten hat gleiche Schreitung, wenn keine relativen Verschiebungen stattfinden. Relativ zu einem solchen System wird ein Punkt anderer Schreitung sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bewegen. — Während die „Geschwindigkeit" stets nur relativ sein kann, besitzt die Schreitung absolute Bedeutung. Es hat keinen Sinn, nach „Größe" und „Richtung" der Schreitung zu fragen; beides ist allein der Geschwindigkeit eigen. Die Verschiedenartigkeit äußert sich auch darin, daß die Schreitung im Gegensatz zur Geschwindigkeit völlig unabhängig von allen Maßsystemen des Raumes und der Zeit ist; diese kommen erst zur Geltung, wenn man zwei Schreitungen miteinander vergleicht und ihren Unterschied zahlenmäßig darstellen will. —

In der Darstellung der mathematischen Zusammenhänge bin ich ziemlich ausführlich, denn es liegt mir daran, das Mathematische dem Physikalischen scharf gegenüberzustellen. — Wer schnell zur Hauptsache kommen will, mag den I. Teil zunächst überspringen.

I. Teil. Mathematische Vorbereitungen.

§ 2. Bezeichnungen.

Schreitung: Bewegungszustand, der durch einen sich völlig selbst überlassenen materiellen Punkt angezeigt wird, der also frei von Beschleunigung ist. Schreitungen an verschiedenen Orten sind „gleich", wenn bei gleichförmiger Andauer keine relativen Verschiebungen eintreten (vgl. § 1).

Lateinische und griechische Buchstaben: Skalare.

Deutsche Buchstaben: Vektoren.

$|\mathfrak{U}|$: Intensität des Vektors $\mathfrak{U}$, positiv gerechnet.

c: Lichtgeschwindigkeit.

x, y, z und ebenso x', y', z': Rechtwinklige Raumkoordinaten mit gleicher und gleichbleibender Schreitung aller Systempunkte.

t und ebenso t': Ortszeit, d. h. die Zeit, insofern sie den Raumkoordinaten zugeordnet wird (Bezeichnung nach H. A. Lorentz).

x, y, z, t und ebenso x', y', z', t' zusammengefaßt: Raum-Zeit-Koordinaten.

Lorentz-Transformation[1]) für Raum und Zeit: Verbindung zwischen zwei Raum-Zeit-Koordinatensystemen besonderer Art. Sind (x, y, z, t) und (x', y', z', t') die beiden Systeme, nennt man v die Geschwindigkeit, mit der in dem einen System der Koordinatenanfangspunkt des anderen sich zu bewegen scheint, legt man die Achsen parallel zueinander, und zwar die z- und die z'-Achse zugleich parallel der Richtungslinie der gegenseitigen Bewegung, so lauten die Transformationsformeln bei passender Wahl der Anfangspunkte für die Zeit und für die Raumkoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = y, \\ z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ z &= \frac{z' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} z'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Mathematisch kann man die Lorentz-Transformation definieren als lineare Transformation, die der Bedingung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (2)$$

genügt. Dies ist der Ausgangspunkt für H. Minkowski. Enger an die physikalische Anwendung schließt sich folgende Definition: Die Lorentz-Transformation ist eine lineare Transformation, welche die Lichtgeschwindigkeit c unverändert läßt und dabei die beiden Koordinatensysteme symmetrisch aufeinander bezieht, so daß man $x, y, z, t, +v$ mit $x', y', z', t', -v$ vertauschen kann.

Lorentz-Transformation für Vorgänge: Wird auch dargestellt durch die Formeln (1). x, y, z, t und x', y', z', t' bedeuten dann aber Koordinaten und Zeiten in ein und demselben Raum-Zeit-Koordinatensystem und geben Lagen und Zeiten für je zwei einander zugeordnete Punkte in zwei materiellen Systemen an. — Wird in diesem Fall mit dem Übergang von einem Vorgang zum andern zugleich auch die entsprechende Transformation für Raum und Zeit verbunden, so verlaufen beide Vorgänge formal in genau gleicher Weise.

$\mathfrak{v}$ und ebenso $\mathfrak{v}'$: Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes als Vektor aufgefaßt. $\mathfrak{v}$ bezieht sich auf die Zeit t, $\mathfrak{v}'$ auf die Zeit t':

1) Der Name „Lorentz-Transformation" rührt von H. Poincaré her. Indem ich hier zwischen Lorentz-Transformationen für „Raum und Zeit" und für „Vorgänge" unterscheide, soll die für die Relativitätstheorie wichtige doppelte Anwendung der Transformationsgleichungen hervorgehoben werden.

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \text{ usw.}, \quad \frac{dx'}{dt'} = v_x', \text{ usw.} \tag{3}$$

τ: Eigenzeit eines sich bewegenden Punktes nach H. Minkowski. Es ist:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt'\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}. \tag{4}$$

w: Eigengeschwindigkeit, definiert durch:

$$\frac{dx}{d\tau} = w_x, \quad \frac{dy}{d\tau} = w_y, \quad \frac{dz}{d\tau} = w_z. \tag{5}$$

$\dot{a}$, $\ddot{a}$, $\dot{\mathfrak{a}}$, $\ddot{\mathfrak{a}}$: Schwellung und Beschleunigung des Skalars a und des Vektors $\mathfrak{a}$. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{da}{dt}, \quad \ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2}, \quad \dot{\mathfrak{a}}_x = \frac{d\mathfrak{a}_x}{dt}, \quad \ddot{\mathfrak{a}}_x = \frac{d^2\mathfrak{a}_x}{dt^2} \\ &\text{usw.} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Als Zeit ist hier im allgemeinen die des betreffenden Raum-Zeit-Systems zu rechnen. Gehört also zum Beispiel der Vektor $\mathfrak{a}'$ dem System x', y', z', t' an, so ist zu setzen:

$$\dot{\mathfrak{a}}_x' = \frac{d\mathfrak{a}_x'}{dt'}, \quad \ddot{\mathfrak{a}}_x = \frac{d^2\mathfrak{a}_x'}{dt'^2} \text{ usw.}$$

Für w aber ist die Eigenzeit als zugehörig zu betrachten, d. h. es ist zu setzen:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \dot{w}_x, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = \dot{w}_y, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = \dot{w}_z. \tag{7}$$

$\dot{w}$ könnte Eigenbeschleunigung heißen.

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$: Beschleunigung eines Punktes in seiner Bahn und quer zur Bahn.

m, $m^{(p)}$, $m^{(q)}$: Ruhmasse, longitudinale und transversale Masse; im folgenden wird stets angenommen werden:

$$m^{(p)} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad m^{(q)} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{8}$$

$\mathfrak{F}$: Newtonsche Kraft, d. h. die gewöhnlich so genannte mechanische Kraft.

$\mathfrak{K}$: Minkowskische Kraft (Bezeichnung nach Lorentz). Es ist:

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9}$$

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, e, ε: Elektrische und magnetische Kraft, elektrische Menge und elektrische Raumdichte.

div $\mathfrak{U}$, vers $\mathfrak{U}$: Divergenz und Version[1]) des Vektors $\mathfrak{U}$. Es ist:

$$\operatorname{div}\mathfrak{U} = \frac{\partial \mathfrak{U}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial z}.$$

$$\operatorname{vers}\mathfrak{U} = \operatorname{rot}\mathfrak{U} = \operatorname{curl}\mathfrak{U};$$

$$\operatorname{vers}_x\mathfrak{U} = \frac{\partial \mathfrak{U}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{U}_y}{\partial z}, \text{ usw.}$$

$(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$, $[\mathfrak{U}, \mathfrak{V}]$: Skalares und vektorielles Produkt der Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$. Es ist:

$$(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \mathfrak{U}_x\mathfrak{V}_x + \mathfrak{U}_y\mathfrak{V}_y + \mathfrak{U}_z\mathfrak{V}_z,$$
$$[\mathfrak{U}, \mathfrak{V}]_x = \mathfrak{U}_y\mathfrak{V}_z - \mathfrak{U}_z\mathfrak{V}_y, \text{ usw.}$$

$\mathfrak{U}^2 = (\mathfrak{U}, \mathfrak{U}) = |\mathfrak{U}|^2$ ist als Skalar anzusehen.

Nimmt man für das elektromagnetische Feld im Innern der Materie genau die gleichen Eigenschaften an wie für das Feld außerhalb, so daß der Unterschied nur darin besteht, daß im Innern der Materie Elektrizität in ruhenden oder bewegten Teilen vorhanden ist, so lauten die elektromagnetischen Feldgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\mathfrak{E} &= 4\pi\varepsilon, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0, \\ \mathfrak{E} &= c\operatorname{vers}\mathfrak{M} - 4\pi\varepsilon\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{M} = -c\operatorname{vers}\mathfrak{E}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$\mathfrak{v}$ bedeutet die Geschwindigkeit der die Elektrizität tragenden Teilchen. — Die Newtonsche Kraft, die ein unendlich wenig ausgedehntes elektrisches Teilchen e bei der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ durch das Feld erfährt, ist:

$$\mathfrak{F} = e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{M}]\right). \tag{11}$$

Heaviside-Ellipsoide: Im Achsenverhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$ abgeplattete Rotationsellipsoide, die sich parallel der Figurenachse mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegen.

§ 3. Lorentz-Transformation für Raum und Zeit.

H. A. Lorentz erfand die nach ihm benannte Transformation zur Behandlung elektrodynamischer Probleme in bewegten Medien. Im vorliegenden Paragraphen soll hierauf noch nicht Rücksicht genommen werden, sondern die Lorentz-Transformation nur insoweit besprochen werden, als sie nicht speziell auf die Vorgänge im elektrodynamischen Feld Bezug hat. Man kann in der Lorentz-Transformation entweder sehen den Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern, oder die Zuordnung eines Vorgangs zu einem andern bei festgehaltenem Koordinatensystem. Hier wird zunächst die erste Auffassung verwertet werden. Dabei ergibt sich eine Transformation für Raum und Zeit.

Für unsere Ziele kommt es dabei darauf an, zwei räumliche Koordinatensysteme aufeinander zu beziehen, von denen jedes bei relativer Ruhe überall gleiche und dauernd gleichbleibende Schreitung kennzeichnet. Wesentlich ist, daß in den beiden Systemen die Zeit den Orten in verschiedener Weise zugeordnet wird. Wählt man gemäß dem vorigen Paragraphen (1) als Transformationsformeln, so stellen x, y, z, t und x', y', z', t' denselben Raumpunkt und

1) Alle die Ausdrücke „Version", „Rotation", „curl" rühren von Maxwell her. — curl empfiehlt sich wenig als internationalen Ausdruck; ich kann mich auch nicht dazu entschließen, den Ausdruck „Rotation" zu gebrauchen, da er den mathematisch und physikalisch sehr wesentlichen Unterschied von rotationalen und polaren Vektoren verwischt.

denselben Zeitpunkt dar. Es ist erlaubt, die Formeln (1) als Definitionsgleichungen für die Lorentz-Transformation anzusehen. Dann ist nur zu beachten, daß es allein auf die Zuordnung der Raum- und Zeitpunkte ankommt, daß also die spezielle Wahl der Achsenrichtungen und der Anfangspunkte von Raumkoordinaten und Zeit in jenen Gleichungen ohne Bedeutung ist. —

Ordnet man zum ursprünglichen Raum-Zeit-System mit verschiedenen Werten der Geschwindigkeit v und verschiedener Bewegungsrichtung zwei neue Systeme zu, so findet man, daß diese untereinander ebenfalls durch eine Lorentz-Transformation verbunden sind. So folgt denn, daß alle die durch Lorentz-Transformationen verbundenen Raum-Zeit-Systeme im mathematischen Sinne des Wortes eine „Gruppe" bilden. Damit wird ausgesagt, daß irgend zwei von ihnen durch eine Lorentz-Transformation ineinander übergeführt werden können. Die Gesamtheit der so verbundenen Raum-Zeit-Systeme heißt die „Lorentz-Gruppe", jedes einzelne zugehörige System ein „Lorentz-System". —

Wird für irgendein Lorentz-System ein Raumpunkt und ein Zeitpunkt ausgewählt, so ordnen sich dazu in den anderen Systemen der Gruppe andere Raumkoordinaten und ein anderer Wert der Zeit zu. Aber alle diese formal verschiedenen Bestimmungen stellen ein und denselben Raum-Zeit-Punkt dar. — Faßt man einen bestimmten materiellen Punkt ins Auge, so wird er demgemäß in jedem einzelnen Zeitmoment seines Bestehens in den verschiedenen Systemen verschiedene „Ortszeiten" vorfinden. Wir werden sogleich erkennen, daß demgegenüber mittels der Minkowskischen Eigenzeit eine andere Zeitrechnung aufgestellt werden kann, bei der für den betreffenden materiellen Punkt die Zeit von dem gewählten Raum-Zeit-Koordinatensystem unabhängig wird.

Wir verfolgen die Bewegung eines materiellen Punktes mit den Raum-Zeit-Koordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' in zwei Lorentz-Systemen, indem wir etwa für zwei aufeinander folgende Momente einander zuordnen: x, y, z, t zu x', y', z', t' und $x+dx,\ y+dy,\ z+dz,\ t+dt$ zu $x'+dx',\ y'+dy',\ z'+dz',\ t'+dt'$. Dann erscheinen die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$, wie leichte Rechnungen mit Rücksicht auf (3) ergeben, verbunden durch die Gleichungen (12) der nächsten Spalte.

Setzt man in den ersten dieser Gleichungen eine der beiden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ oder $\mathfrak{v}'$ gleich c, so zeigt sich, daß die andere Geschwindigkeit ebenfalls gleich c wird. Die Lichtgeschwindigkeit erscheint hiernach als eine Invariante der Lorentz-Trans-

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\,\mathfrak{v}_x}{c^2}} = \frac{1+\frac{v\,\mathfrak{v}_x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\
&\frac{\mathfrak{v}_x'}{\mathfrak{v}_x} = \frac{\mathfrak{v}_y'}{\mathfrak{v}_y} = \frac{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}},\\
&\mathfrak{v}_x' = \frac{\mathfrak{v}_x - v}{1-\frac{v\,\mathfrak{v}_x}{c^2}}, \qquad \mathfrak{v}_x = \frac{\mathfrak{v}_x' + v}{1+\frac{v\,\mathfrak{v}_x'}{c^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

formation. Im vorigen Paragraphen wurde darauf hingewiesen, daß man diese Eigenschaft auch voranstellen und zur Definition der Lorentz-Transformation benutzen kann.

Vergleicht man entsprechende Zeitmomente dt und dt' eines sich bewegenden Punktes, so ergibt sich:

$$\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}\,dt' = \sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\,dt. \quad (13)$$

Hier ist keine Beziehung auf den besonderen gegenseitigen Zusammenhang der Raum-Zeit-Systeme x, y, z, t und x', y', z', t' explizite erkennbar, definiert man also nach Minkowski durch $\tau = \int d\tau$ und

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}\,dt \quad (14)$$

die „Eigenzeit" τ des bewegten Punktes, so ist diese für alle durch die Lorentz-Transformation verbundenen Raum-Zeit-Systeme von gleicher Größe. Mathematisch gesprochen besteht also der Satz: Die Eigenzeit τ ist gegenüber der Lorentz-Transformation invariant.

§ 4. Eigenzeit und Punktmechanik.

Für die Elektronenbewegung und die Relativitätsprobleme spielt die durch (14) definierte Eigenzeit eine bemerkenswerte Rolle. Es soll ihr daher noch besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Die Eigenzeit hat schon für ein einziges Raum-Zeit-Koordinatensystem ohne Rücksicht auf Transformationen Bedeutung. Unsere erste Aufgabe soll sein, hierauf zu achten.

Beurteilt man die Bewegung eines Punktes nach der Eigenzeit, so ergibt sich statt der gewöhnlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eine Vektorgröße, die ich „Eigengeschwindigkeit" nennen will. Wird sie mit $\mathfrak{w}$ bezeichnet, so ist zu setzen:

$$\mathfrak{w}_x = \frac{dx}{d\tau}, \quad \mathfrak{w}_y = \frac{dy}{d\tau}, \quad \mathfrak{w}_z = \frac{dz}{d\tau}. \quad (15)$$

Für den Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen und der Eigengeschwindigkeit folgt hiernach:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w} &= \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}, \qquad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{w}}{\sqrt{1+\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}}}, \\ \sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1+\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}} &= 1. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

In Parallele zu der Eigengeschwindigkeit tritt die „Eigenbeschleunigung", die mit $\dot{\mathfrak{w}}$ bezeichnet werden soll. Sie ist definiert durch:

$$\dot{w}_x = \frac{d^2x}{d\tau^2}, \quad \dot{w}_y = \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad \dot{w}_z = \frac{d^2z}{d\tau^2}. \quad (17)$$

Einfache Rechnungen ergeben zwischen $\dot{\mathfrak{w}}$ und der gewöhnlichen Beschleunigung den Zusammenhang:

$$\dot{w}_x = \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\ddot{x} + \frac{\dot{x}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}})}{c^2\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)}}{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}, \quad (18)$$

mit zwei analogen Formeln für y und z. Dabei ist:

$$(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{v}}) = (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \mathfrak{v}\frac{d\,|\mathfrak{v}|}{dt}. \quad (19)$$

Bezeichnet man die Beschleunigung in der Bahn mit $\mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{p}$ die Richtung von $\mathfrak{v}$ und die Intensität $d\,|\mathfrak{v}|/dt$ besitzt, und die Beschleunigung quer zur Bahn mit $\mathfrak{q}$, so daß $\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ wird, dann kann an Stelle von (18) geschrieben werden:

$$\dot{\mathfrak{w}} = \frac{\mathfrak{p}}{\left(1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}\right)^2} + \frac{\mathfrak{q}}{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}. \quad (20)$$

An diese Formel knüpfen sich wichtige Folgerungen für die Mechanik von Massenpunkten, deren Bewegungsmasse von der Ruhmasse m in solcher Weise verschieden ist, daß bei der Bewegung die longitudinale Masse $m^{(\lambda)}$ und die transversale Masse $m^{(\varphi)}$ gegeben werden durch:

$$m^{(\lambda)} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}^3}}, \qquad m^{(\varphi)} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}. \quad (21)$$

Bedeutet $\mathfrak{F}$ die antreibende mechanische Kraft, die „Newtonsche Kraft", so kann die Bewegungsgleichung für einen solchen Massenpunkt geschrieben werden in der Form:

$$\frac{m\mathfrak{p}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}^3}} + \frac{m\mathfrak{q}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} = \mathfrak{F}. \quad (22)$$

Es mag noch bemerkt werden, daß hierzu eine kinetische Energie E gehört, gegeben durch:

$$E = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} - 1\right), \quad (23)$$

denn für die Energieübertragung kommt nur die Kraftkomponente parallel $\mathfrak{v}$ in Betracht, sodaß

$$dE = \frac{m\mathfrak{p}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}^3}}\,|\mathfrak{v}|\,dt, \quad \mathfrak{p} = \frac{d\,|\mathfrak{v}|}{dt} \quad (24)$$

ist, woraus sogleich (23) folgt.

Wir erkennen bei Hinblick auf (20), daß die Bewegungsgleichung (22) auch die Form erhalten kann:

$$m\dot{\mathfrak{w}} = \mathfrak{K}, \quad (25)$$

wobei abkürzend

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}} \quad (26)$$

gesetzt werde. $\mathfrak{K}$ heißt nach Lorentz die „Minkowskische Kraft". Es zeigt sich also, daß an Stelle der Bewegungsgleichung

$$m\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{F} \quad (27)$$

für einen Massenpunkt mit fester Masse m die Gleichung (25) tritt, wenn die Masse gemäß den Formeln (21) von der Geschwindigkeit abhängt. Die Masse, die gewöhnliche Beschleunigung und die Newtonsche Kraft werden also durch die Ruhmasse, die Eigenbeschleunigung und die Minkowskische Kraft ersetzt. —

Es soll nun zweitens das Verhalten eines Massenpunktes in zwei Lorentz-Systemen verglichen werden. Dabei setzen wir fest, daß die träge Masse als eine Invariante betrachtet werden soll. Beim Übergang von einem Lorentz-System zu einem andern soll also für einen Massenpunkt mit fester Masse der Wert dieser, für einen Massenpunkt mit veränderlicher Masse der Wert der Ruhmasse und die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit als gleichbleibend angesehen werden. Da die Transformation der Beschleunigungen fest gegeben ist, folgt so eine Transformation für die bewegenden Kräfte.

Für die gewöhnlichen Beschleunigungen erhält man leicht mittels der Transformationsformeln (12) unter Rücksicht auf (13):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\ddot{x}'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}^3}} &= \frac{\ddot{x} - \frac{v}{c^2}(\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}^3}}, \\ \frac{\ddot{y}'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}^3}} &= \frac{\ddot{y} + \frac{v}{c^2}(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}^3}}, \\ \frac{\ddot{z}'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}^3}} &= \frac{\ddot{z}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}^3}}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Die Beschleunigungen im System x', y', z', t' hängen hiernach zwar linear, aber ziemlich kompliziert von den Beschleunigungen im System (x, y, z, t) ab. Verfolgt man die Bewegungen eines materiellen Punktes mit fester Masse, so ist mit Rücksicht auf die angenommene Invarianz der Masse zu setzen:

$$m\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{F}, \quad m\dot{\mathfrak{v}}' = \mathfrak{F}'. \tag{29}$$

Es entspricht also dann nach den Formeln (28) der Kraft $\mathfrak{F}$ im System (x, y, z, t) eine Kraft $\mathfrak{F}'$ im System (x, y, z, t), gegeben durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{F}_x'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}} &= \frac{\mathfrak{F}_x - \frac{v}{c^2}[\mathfrak{v}\mathfrak{F}]_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}, \\
\frac{\mathfrak{F}_y'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}} &= \frac{\mathfrak{F}_y + \frac{v}{c^2}[\mathfrak{v}\mathfrak{F}]_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}, \\
\frac{\mathfrak{F}_z'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}} &= \frac{\mathfrak{F}_z}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Für die Eigenbeschleunigungen findet man bei Benutzung von (12), (13), (14), (16) ohne Schwierigkeit:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathfrak{w}}_x' &= \dot{\mathfrak{w}}_x, \quad \dot{\mathfrak{w}}_y' = \dot{\mathfrak{w}}_y, \\
\dot{\mathfrak{w}}_z' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\dot{\mathfrak{w}}_z - \frac{v}{c^2}(\mathfrak{v}\dot{\mathfrak{w}})\right).
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Verfolgen wir die Bewegungen eines Massenpunktes, dessen Masse gemäß den Formeln (21) von der Geschwindigkeit abhängt, so daß unter Rücksicht auf die angenommene Invarianz der Masse nach (25) zu setzen ist:

$$m\dot{\mathfrak{w}} = \mathfrak{K}, \quad m\dot{\mathfrak{w}}' = \mathfrak{K}', \tag{32}$$

wobei

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}, \quad \mathfrak{K}' = \frac{\mathfrak{F}'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}}, \tag{33}$$

so entspricht nach (31) der Minkowskischen Kraft $\mathfrak{K}$ im System (x, y, z, t) eine Kraft $\mathfrak{K}'$ im System (x', y', z', t'), gegeben durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{K}_x' &= \mathfrak{K}_x, \quad \mathfrak{K}_y' = \mathfrak{K}_y, \\
\mathfrak{K}_z' &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\mathfrak{K}_z - \frac{v}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{K})\right).
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

§ 5. Kontinuum.

Wir denken uns nun ein Kontinuum in Bewegung, das „Materie" heißen mag. Die einzelnen Punkte sollen soweit individualisiert sein, daß sie wieder erkannt werden können. Sind dann in t_0 und t_0' irgend zwei Zeitmomente gegeben, für welche die Anordnung der materiellen Punkte in den beiden Lorentz-Raum-Zeit-Systemen (x, y, z, t) und (x', y', z', t') ins Auge gefaßt wird, so bestimmen die Transformationsgleichungen (1) zu t_0 und t_0' eine gewisse Ebene, für welche gesetzt werden möge: $z = z_{0,0}$ und $z' = z_{0,0}'$. Diese Ebene umfaßt diejenigen materiellen Punkte, welche in den Zeitpunkten $t = t_0$ und $t' = t_0'$ sich gerade in den der Lorentz-Transformation entsprechenden Lagen befinden, für welche t_0 und t_0' denselben Zeitmoment des Bestehens, dieselbe Eigenzeit darstellen. Ihre Raum-Zeit-Koordinaten erfüllen also die Gleichungen (1).

Für die materiellen Punkte, die zu den Zeiten t_0, t_0' außerhalb der Ebenen $(z_{0,0})$, $(z_{0,0}')$ liegen, trifft das nicht zu. Hat ein materieller Punkt P im System (x, y, z, t) zur Zeit t_0 zum Beispiel die Koordinaten x_0, y_0, z_0, wobei z_0 von $z_{0,0}$ verschieden ist, so ergeben (1) eine von t_0' verschiedene Zeit t' und liefern demgemäß die Koordinaten x', y', z' des Punktes P im System (x', y', z', t') nicht zur Zeit t_0', sondern zur Zeit t'. Um also die Koordinaten von P im System (x', y', z', t') zur Zeit t_0' festzustellen, muß noch die Lageänderung in der Zwischenzeit t' bis t_0' berücksichtigt werden.

Die beiden Spezialfälle, in denen die Materie entweder im System (x, y, z, t) oder im System (x', y', z', t') ruht, sind ausgezeichnet. Es ist dann die Zeit im System der Ruhe ohne Bedeutung, die Formeln (1) verbinden daher direkt die Anordnung der Materie in den beiden Systemen, wenn man von den beiden Formeln zwischen z und z' jedesmal diejenige fortläßt, welche die Zeit für das System der Ruhe enthält, und wenn man zugleich in der anderen Formel für das System der Bewegung diejenige Zeit einsetzt, für welche man die Anordnung bestimmen will. Die Formeln zeigen, daß in diesen Spezialfällen die Materie im System der Bewegung mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit v in der Richtung $+z$ oder $-z'$ in reiner Parallelverschiebung begriffen ist. Es folgt weiter, daß die Materie quer zur Bewegungsrichtung in beiden Systemen die gleiche Anordnung der Teile besitzt, daß sich aber parallel der Bewegungsrichtung gegenüber dem System der Ruhe eine Verkleinerung der Abstände im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$ zeigt.

Unmittelbar ist hiernach ersichtlich, daß eine ruhende Kugel in einem der Lorentz-Systeme

sich in jedem anderen als Heaviside-Ellipsoid darstellt.

Sehr einfach kann auch der Fall behandelt werden, wo die Materie sich zwar in beiden betrachteten Systemen, jedoch ohne relative Verschiebung der Teile und mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in reiner Parallelverschiebung bewegt.

$\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ seien die Geschwindigkeiten; für den Zusammenhang zwischen diesen und ihren Komponenten sind uns die Formeln (12) schon bekannt. Durch einfache Rechnungen, auf die nicht näher eingegangen werden soll, ergibt sich als Resultat Folgendes: Sind Δx, Δy, Δz und $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ die Koordinatendifferenzen für irgend zwei bestimmte materielle Punkte in den beiden Systemen, wobei Δx, Δy, Δz sich für beide materielle Punkte auf den gleichen Zeitpunkt t, und ebenso $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ sich auf den gleichen Zeitpunkt t' beziehen, so ist:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= \Delta x + \frac{\frac{v\mathfrak{v}_x}{c^2}}{1-\frac{v\mathfrak{v}_z}{c^2}}\Delta z,\\
\Delta y' &= \Delta y + \frac{\frac{v\mathfrak{v}_y}{c^2}}{1-\frac{v\mathfrak{v}_z}{c^2}}\Delta z,\\
x &= \Delta x' - \frac{\frac{v\mathfrak{v}_x'}{c^2}}{1+\frac{v\mathfrak{v}_z'}{c^2}}\Delta z',\\
\Delta y &= \Delta y' - \frac{\frac{v\mathfrak{v}_y'}{c^2}}{1+\frac{v\mathfrak{v}_z'}{c^2}}\Delta z',\\
\frac{\Delta z'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}} &= \frac{\Delta z}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}.
\end{aligned}\right| \qquad (35)$$

Hiernach findet sich jeder Querschnitt $z=\text{const}$ in einem Querschnitt $z'=\text{const}$ in gleicher Anordnung der materiellen Teile wieder, es sind aber die verschiedenen Querschnitte dieser Art in den beiden Systemen (x, y, z) und (x', y', z') verschieden angeordnet, und zwar erscheinen sie beim Übergang von einem System zum anderen in ihren Ebenen parallel zueinander verschoben und überdies in andere Abstände voneinander gestellt. — Das Volumen entsprechender Teile ist infolge der Abstandsänderung der Querschnitte in den beiden Systemen verschieden. Nennen wir es ω bezüglich ω', so folgt nach den Formeln für Δz, $\Delta z'$ sogleich:

$$\frac{\omega'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}} = \frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}. \qquad (36)$$

Besonders hervorgehoben mag noch werden, daß einem Heaviside-Ellipsoid in einem Lorentz-System auch in jedem anderen ein Heaviside-Ellipsoid entspricht. Um dies einzusehen, braucht man nur zu beachten, daß dem Heaviside-Ellipsoid in dem „Ruhsystem", d. h. in dem Lorentz-System, in dem die Materie zu ruhen scheint, eine Kugel entspricht, und daß zu dieser wieder in jedem anderen System ein Heaviside-Ellipsoid gehört.

Im allgemeinen Fall, wenn die Bewegung sich ändert und wenn während der Bewegung im Kontinuum relative Verschiebungen stattfinden, gelten die Formeln (35) zwar noch, aber nur für Bereiche von unendlich kleinen Dimensionen und in Gebieten, in welchen die etwaigen Verzerrungen der materiellen Teile infolge der Bewegung nur stetig von Ort zu Ort sich ändern. Auf den Beweis soll hier nicht eingegangen werden. In einem Gebiet der angegebenen Art möge ein beliebiger materieller Punkt P und für ihn bestimmter Augenblick des Bestehens herausgegriffen werden. Dieser Augenblick werde im System (x, y, z, t) durch t, im System (x', y', z', t') durch t' bezeichnet. Die Werte t, t' und die beiden räumlichen Lagen von P in den beiden Systemen sind dann durch die Formeln (1) miteinander verbunden. In der Umgebung von P werde ein gewisses unendlich kleines Bereich von Materie abgegrenzt. Dieses habe im System (x, y, z, t) zur Zeit t das Volumen $d\omega$, im System (x', y', z', t') zur Zeit t' das Volumen $d\omega'$. $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ seien die Geschwindigkeiten in den beiden Systemen in dem erwählten Zeitmoment t, t', dann gilt gemäß (36) der Satz:

$$\frac{d\omega'}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}} = \frac{d\omega}{\sqrt{1-\frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}}. \qquad (37)$$

Wie ersichtlich, haben wir hier eine „Invariante" der Lorentz-Transformationen vor uns; man könnte sie „Ruhvolumenelement" nennen, denn sie gibt das Volumenelement in demjenigen Lorentz-System an, in welchem das betrachtete Element der Materie zu ruhen scheint.

An den Satz (37) knüpft sich die Transformation der „Dichte". Ist de die „Menge" der Materie oder der Elektrizität usw. in $d\omega$, so muß sie in $d\omega'$ sich wiederfinden, da ja $d\omega'$ die gleiche Materie usw. umfassen soll. Bezeichnen also ε und ε' die Dichten, so muß gelten: $\varepsilon' d\omega' = \varepsilon d\omega$, woraus für die Transformation der Dichte ε folgt:

$$\varepsilon' \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}} = \varepsilon \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^2}}. \qquad (38)$$

Wieder ist eine Invariante der Lorentz-Transformation gefunden; man könnte sie „Ruhdichte" nennen. —

§ 6. Ausbreitung von Erregungen.

Bei Untersuchung der Ausbreitung von Erregungen, wie Schall, Licht usw., ist die Ausbreitung relativ zum Koordinatensystem und relativ zur Materie zu unterscheiden. Es soll hier nur der Fall behandelt werden, wo die Ausbreitung in ruhender Materie nach allen Seiten mit gleichmäßiger Geschwindigkeit erfolgt. Es genügt auch, wenn wir weiter noch annehmen, daß ein einziges, punktförmiges Zentrum gegeben ist, von dem die Erregung ausgeht.

Die Ruhe der Materie kann sich nur in einem einzigen der Lorentz-Systeme zeigen. Die Koordinaten in diesem Systeme sollen mit x', y', z', t' bezeichnet werden. Wir fragen nun nach dem Anblick des Phänomens in irgendeinem anderen System und wählen dazu das System (x, y, z, t) aus, welches mit dem Ruhsystem durch die Formeln (1) verbunden ist. In ihm scheint die Materie sich in reiner Parallelverschiebung mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit v in der positiven z-Richtung zu bewegen. — Es ist erlaubt und bequem, in Gedanken die Ausbreitung der Erregung zu ersetzen durch die Emission besonderer materieller Teilchen, die im Ruhsystem vom Zentrum nach allen Seiten mit der gleichen Geschwindigkeit geradlinig ausgesandt werden. Die Bahnen der emittierten Teilchen geben dann sowohl im System der Ruhe (x', y', z', t') als im System der Bewegung (x, y, z, t) die „Strahlen" an, die geradlinig erscheinen. Wird noch berücksichtigt, daß die Geschwindigkeiten der emittierten Teilchen, also auch die Geschwindigkeiten in den Strahlen durch die uns schon bekannten Formeln (12) verknüpft sind, so ist das Problem leicht zu behandeln. Ich gebe ohne Beweis die Hauptresultate an.

Als „Wellenfläche" bezeichnen wir diejenige Fläche, welche von der Erregung in einem bestimmten Zeitpunkt t', bezüglich t des betreffenden Lorentz-Systems erreicht wird. Im Ruhsystem (x', y', z', t') setzen wir gleichmäßige Geschwindigkeit voraus, die Wellenflächen sind also hier kugelförmig. Ist $|\mathfrak{v}'|$ die Geschwindigkeit, so hat die Wellenfläche zur Zeit $\Delta t'$ nach der Erregung den Radius

$$r' = |\mathfrak{v}'| \, \Delta t'. \qquad (39)$$

Im System (x, y, z, t), wo die Materie sich mit der Geschwindigkeit v parallel z bewegt, erscheinen die Wellenflächen als Rotationsellipsoide mit der Figurenachse parallel der Bewegungsrichtung. Ist die Zeit Δt seit dem Ausgang der Erregung vom Zentrum verflossen, so haben die Halbachsen a, b, c des Ellipsoides die Größen:

$$\left.\begin{aligned} a = b &= \mathfrak{v}' \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2 \mathfrak{v}'^2}{c^4}}} \, \Delta t, \\ c &= |\mathfrak{v}| \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2 \mathfrak{v}'^2}{c^4}} \, \Delta t. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Die Abplattung α in geodätischem Sinne ist also:

$$\left.\alpha = \frac{a - c}{a} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2 \mathfrak{v}'^2}{c^4}}}.\right\} \qquad (41)$$

Es muß nun noch die Lage der Wellenfläche in bezug auf die Bewegungsrichtung v, also z festgestellt werden.

Q mit den Koordinaten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ sei der Raumpunkt im System (x, y, z, t), von dem vor der Zeit Δt jene Erregung ausging, deren Ort in den Formeln (40) dargestellt ist, P sei der materielle Punkt, der damals in Q lag, der also als Ausgangspunkt in der Materie erscheint. Nach dieser Bezeichnungsweise hat Q dauernd dieselben Koordinaten x_0, y_0, z_0, während P zur Zeit $t + \Delta t$ die Koordinaten $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0 + v\,\Delta t$ besitzt. — Es bestehen nun folgende Sätze:

Zur Zeit Δt erscheint der Mittelpunkt der Wellenfläche (40) gegenüber dem Ursprung Q im Koordinatensystem (x, y, z) um

$$\left.\Delta \xi = v \frac{1 - \frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2 \mathfrak{v}'^2}{c^4}} \, \Delta t\right\} \qquad (42)$$

und gegenüber dem Ursprungsort P in der sich bewegenden Materie um

$$\Delta \xi = - \, v \frac{\mathfrak{v}'^2}{c^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2 \mathfrak{v}'^2}{c^4}} \, \Delta t \qquad (43)$$

parallel der positiven z-Richtung verschoben. —

Nach (41) ist die Abplattung α der Wellenflächen am stärksten für verschwindende Ausbreitungsgeschwindigkeit der Erregung und hat hier die Größe:

$$\lim_{v=0} \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2; \qquad (44)$$

sie sinkt bei immer weiter wachsender Ausbreitungsgeschwindigkeit schließlich für Lichtgeschwindigkeit auf den Wert 0. Das heißt dann, daß bei Ausbreitung der Erregung mit Lichtgeschwindigkeit auch in der bewegten Materie die Wellenflächen Kugelgestalt haben, wie es der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit entspricht. — Beachtet man die Größe der Wellenfläche, nicht aber ihre Lage, so erscheint die Ausbreitungsgeschwindigkeit gegenüber der im Ruhsystem im allgemeinen vermindert, und zwar am stärksten bei verschwindender Ausbreitungsgeschwindigkeit; in diesem Grenzfall geschieht die Verminderung parallel der Bewegungsrichtung im Verhältnis $1 : 1 - v^2/c^2$ und quer dazu im Verhältnis $1 : 1 - v^2/2c^2$. Bei wachsender Ausbreitungsgeschwindigkeit v' wird die Verminderung geringer und schließlich bei der Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit verschwindet sie. Es stellt sich dann auch im System der Bewegung in allen Richtungen die Lichtgeschwindigkeit ein.

Der geometrische Mittelpunkt der Wellenfläche (40) fällt nach (42) im allgemeinen nicht in den Ursprungsort der Erregung im Koordinatensystem (also in Q), auch liegt er nach (43) im allgemeinen nicht in dem materiellen Teilchen (P), wo die Erregung entsprang. In bezug auf das Koordinatensystem betrachtet (zu vergleichen Formel (42)) erscheint die Erregung von der Materie mitgeschleppt, wenn auch nicht mit der vollen Geschwindigkeit v; in bezug auf die Materie betrachtet (zu vergleichen Formel (43)), erscheint sie zurückzubleiben. In dem einen Grenzfall, wenn die Erregungsgeschwindigkeit verschwindend klein ist, scheint die Erregung sich vollständig mit der Materie mitzubewegen, im anderen Grenzfall, wenn die Erregungsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit erreicht, scheint die Erregung an der Bewegung der Materie gar keinen Anteil zu haben.

§ 7. Elektrodynamische Probleme.

Die Lorentz-Transformation ist für elektrodynamische Probleme erfunden worden. Das Wesentliche ergibt sich, wenn zu den Transformationsformeln für Zeit und Raum noch solche für die Felderregungen hinzugenommen werden.

Die elektrodynamischen Feldgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\,\mathfrak{E} = 4\pi\varepsilon, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0,\\ &\dot{\mathfrak{E}} = c\,\operatorname{vers}\mathfrak{M} - 4\pi\varepsilon\mathfrak{v}, \quad \dot{\mathfrak{M}} = -c\,\operatorname{vers}\mathfrak{E}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Wendet man hier die Transformation für Raum und Zeit an und betrachtet dabei die Menge der Elektrizität als invariant, so daß für die Transformation von ε die Gleichung (38) anzunehmen ist, setzt man ferner noch mit Lorentz für die Transformation von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x' &= \frac{\mathfrak{E}_x - \frac{v}{c}\mathfrak{M}_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathfrak{E}_y' = \frac{\mathfrak{E}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{M}_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\ \mathfrak{E}_z' &= \mathfrak{E}_z,\\ \mathfrak{M}_x' &= \frac{\mathfrak{M}_x + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathfrak{M}_y' = \frac{\mathfrak{M}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\ \mathfrak{M}_z' &= \mathfrak{M}_z, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

so liefern die Gleichungen (45) für das System (x', y', z', t) die Feldgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\,\mathfrak{E}' = 4\pi\varepsilon', \qquad \operatorname{div}\mathfrak{M} = 0,\\ &\dot{\mathfrak{E}}' = c\,\operatorname{vers}\mathfrak{M}' - 4\pi\varepsilon'\mathfrak{v}', \quad \dot{\mathfrak{M}}' = -c\,\operatorname{vers}\mathfrak{E}'. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Diese transformierten Feldgleichungen sind den Ausgangsgleichungen genau gleich; es besteht also der folgende außerordentlich wichtige Satz, dem die Lorentz-Transformation ihre Bedeutung verdankt:

Ein jeder elektrodynamische Vorgang wird in den verschiedenen Lorentz-Systemen durch Feldgleichungen genau derselben Form beschrieben.

Denkt man an die Auffassung der Lorentz-Transformation als Zuordnung eines Vorgangs zu einem andern bei festgehaltenem Raum-Zeit-Kordinaten-System, so kann man auch sagen: Zu jedem elektrodynamischen Vorgang lassen sich unendlich viele andere Vorgänge so zuordnen, daß der Verlauf aller im gleichen Raum-Zeit-System durch Lorentz-Transformationen verknüpft ist.

Für uns ist es besonders wichtig, in dem so verbundenen Raum-Zeit-Koordinaten-System oder in den so verbundenen Vorgängen die bewegenden mechanischen Kräfte zu vergleichen.

Da wir in jedem Fall die verglichenen Systeme als formal gleichwertig ansehen, müssen wir bei der angenommenen Invarianz der Elektrizität für die Newtonschen Kräfte setzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F} &= e\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{M}]\right),\\ \mathfrak{F}' &= e\left(\mathfrak{E}' + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{v}'\,\mathfrak{M}']\right). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Wendet man nun die Transformationsformeln (46) an, so folgen für den Zusammenhang von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ die Formeln (33), (34):

Es transformieren sich also die Newtonschen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs genau so wie die Newtonschen Kräfte an Massenpunkten, deren Masse gemäß den Gesetzen (21) von der Ge-

schwindigkeit abhängt, und deren Ruhmasse invariant ist.

An diesen Satz schließen sich Folgerungen von großer Tragweite für die Theorie der Elektronen, und dann weiter für die Relativitätstheorie. Wir gewinnen sie durch Behandlung des speziellen Falles der freien Bewegung eines Elektrons, das keine andere als elektrodynamische Masse besitzt.

Das Feld, welches das Elektron selbst erregt, trennen wir mathematisch als „Eigenfeld" ab. Was dann übrig bleibt, soll „Außenfeld" heißen. Das wirklich bestehende Feld erscheint dann als Superposition des Außen- und des Eigenfeldes. Die Dimensionen des Elektrons sollen gegenüber der Inhomogenität des äußeren Feldes so klein angenommen werden, daß bei der Beurteilung der mechanischen Einwirkung des Außenfeldes auf das Elektron mittels der Formeln (48) das Elektron als punktförmig angesehen werden darf. Für das innere Feld ist dieses durchaus nicht erlaubt, da sich dann unendlich große Masse ergeben würde. Bei der Beschleunigung des Elektrons entstehen wegen des Eigenfeldes widerstehende Kräfte, die einer „Trägheit" gleichkommen und eben deshalb darf von elektromagnetischer Masse gesprochen werden. Ist keine andere Trägheit wirksam, so muß sich eine jeweilige Beschleunigung des Elektrons solcher Art einstellen, daß die Summe der elektrodynamischen Trägheitskräfte mit der durch (48) dargestellten Einwirkung des Außenfeldes gerade im Gleichgewicht ist. Damit die dabei vorausgesetzte Zusammenfassung der äußeren mechanischen Kräfte stattfinden kann, muß man sich das Elektron als „fest" vorstellen.

Nun möge die Lorentz-Transformation für Vorgänge oder für Raum und Zeit angewendet werden. Dann ändern sich wirklich oder nur formal äußeres Feld, Gestalt des Elektrons, inneres Feld und Bewegungszustand. Die Ladung e aber bleibt ungeändert. Da die Newtonschen Kräfte des Außen- und des Eigenfeldes in gleicher Weise transformiert werden, bleibt das Gleichgewicht bestehen. So zeigt uns die Transformation entweder einen neuen Fall einer freien Bewegung eines Elektrons oder eine Beschreibung seines Verhaltens in einem neuen Raum-Zeit-System. —

Worauf es uns hier ankommt, ist der Vergleich der elektrodynamischen Masse, welche ein und dasselbe Elektron zeigt, wenn es in verschiedenen Raum-Zeit-Systemen beurteilt wird. Zwei Lorentz-Systeme seien (x, y, z, t) und (x', y', z', t'). e sei die Ladung; $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ mögen die Einwirkung des Außenfeldes darstellen. Wir betrachten einen Zeitmoment, in welchem das Elektron im System (x, y, z, t) verschwindende Geschwindigkeit hat. Dann ist für dieses System, dem „Ruhsystem", und diesen Augenblick nach (18), (26) und (48)

$$\dot{\mathfrak{v}} = \dot{\mathfrak{v}}, \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{K} = e\mathfrak{E}. \tag{49}$$

Nun soll noch angenommen werden, daß das Elektron im Ruhsystem (x, y, z, t) kugelig beschaffen sei. Es soll also in diesem System ε nur eine Funktion des Abstandes vom Mittelpunkt des Elektrons sein. — Dann ist die „Masse" wegen des Eigenfeldes als gleich für alle etwaigen Bewegungsrichtungen anzusetzen, so daß

$$m\dot{\mathfrak{w}} = m\dot{\mathfrak{v}} = \mathfrak{F} = \mathfrak{K} = e\mathfrak{E} \tag{50}$$

sein muß, wobei m eine „Masse" und zwar die elektrodynamische Ruhmasse bezeichnet, welche allein durch die Beschaffenheit des Elektrons bestimmt wird. m ist auch unabhängig davon, wie das äußere Feld beschaffen und wie demgemäß die mechanische Kraft $\mathfrak{F}$ gerichtet ist.

Im System (x', y', z', t') sind die Beschleunigungen durch (31) und die mechanischen Kräfte des Außenfeldes, wie wir vorhin fanden, durch (34) bestimmt. Wegen der Beziehungen (50) gilt daher

$$m\dot{\mathfrak{w}}' = \mathfrak{K}', \tag{51}$$

wobei m die gleiche Größe wie in (50) bedeutet, also die Ruhmasse im zugehörigen Ruhsystem angibt. — Denkt man sich das elektrodynamische Außenfeld in immer neuer Verteilung, so wird $\mathfrak{K}'$ ebenso wie $\mathfrak{K}$, $\dot{\mathfrak{w}}'$ ebenso wie $\dot{\mathfrak{w}}$ immer neue Werte annehmen, immer aber bleibt (50) und also auch (51) mit gleichem Wert m gültig: (51) erscheint so für ein im Ruhsystem kugeliges Elektron als Bewegungsgleichung in den übrigen Lorentz-Systemen des Raumes und der Zeit. Das Elektron verhält sich also in diesen Systemen gerade so, als ob seine Masse von der Geschwindigkeit gemäß den Gesetzen (21) abhängt.

Will man diesem Satz nicht irrtümlich eine zu große Tragweite zuschreiben, so muß wohl beachtet werden, daß der Satz nur das Verhalten des Elektrons in den verschiedenen Lorentz-Systemen in einem Augenblick vergleicht, wo es im Ruhsystem kugelförmige Gestalt besitzt. Ändert also etwa das Elektron bei der Bewegung die Gestalt in irgendeiner Weise, so daß schon im nächsten Augenblick die Ruhgestalt nicht mehr kugelförmig ist, so wird unser Satz schon im nächsten Augenblick seine Anwendbarkeit verlieren. Einzig und allein in dem speziellen ausgezeichneten Fall, wo das Elektron seine Gestalt stets gleichzeitig mit der Bewegung so ändert, daß die Gestalt in dem jeweiligen Ruhsystem (wo das Elektron eben

die Geschwindigkeit o besitzt) kugelig und dabei den Maßzahlen nach von gleicher Größe ist, stellt die Formel (51) die allgemeine Bewegungsgleichung des Elektrons dar. Gerade diesen Fall nimmt die Relativitätstheorie an, — aber indem sie das tut, macht sie eine physikalische Hypothese, die nicht mehr in den Bereich der rein mathematischen Untersuchungen dieses ersten Teiles gehört.

II. Teil. Relativitätsprinzip, Äther und Raum-Zeit-Anschauung.

§ 8. Relativitätsprinzip gegen Äther.

Für die weiteren Darlegungen ist es wichtig, die verschiedenen einander entgegenstehenden Standpunkte kennen zu lernen; insbesondere ist festzustellen, wie einzelne Autoren dahin gelangen, aus den Relativitätsgesetzen einen Widerspruch gegen die Ätherhypothese abzuleiten. So sei es gestattet, hier einleitend einige Zitate voranzustellen.

Hören wir zunächst A. Einstein. In dem zitierten Jahrbuch der Radioaktivität usw. (Bd. 4, S. 412) schreibt er:

„Aber das negative Resultat des Experimentes von Michelson und Morley zeigte, daß in einem bestimmten Falle auch ein Effekt zweiter Ordnung (proportional v^2/c^2) nicht vorhanden war, trotzdem er nach den Grundlagen der Lorentzschen Theorie bei dem Versuche sich hätte bemerkbar machen müssen.

Es ist bekannt, daß jener Widerspruch zwischen Theorie und Experiment durch die Annahme von H. A. Lorentz und Fitzgerald, nach welcher bewegte Körper in der Richtung ihrer Bewegung eine bestimmte Kontraktion erfahren, formell beseitigt wurde. Diese ad hoc eingeführte Annahme erschien aber doch nur als ein künstliches Mittel, um die Theorie zu retten; der Versuch von Michelson und Morley hatte eben gezeigt, daß Erscheinungen auch da dem Relativitätsprinzip entsprechen, wo dies nach der Lorentzschen Theorie nicht einzusehen war. Es hatte daher den Anschein, als ob die Lorentzsche Theorie wieder verlassen und durch eine Theorie ersetzt werden müsse, deren Grundlagen dem Relativitätsprinzip entsprechen, denn eine solche Theorie ließe das negative Ergebnis des Versuchs von Michelson und Morley ohne weiteres voraussehen.

Es zeigt sich aber überraschenderweise, daß es nur nötig war, den Begriff der Zeit genügend scharf zu fassen, um über die soeben dargelegte Schwierigkeit hinwegzukommen. Es bedurfte nur der Erkenntnis, daß man eine von H. A. Lorentz eingeführte Hilfsgröße, welche er „Ortszeit" nannte, als Zeit schlechthin definieren kann. Hält man an der angedeuteten Definition der Zeit fest, so entsprechen die Grundgleichungen der Lorentzschen Theorie dem Relativitätsprinzip, wenn man nur die obigen Transformationsgleichungen durch solche ersetzt, welche dem neuen Zeitbegriff entsprechen. Die Hypothese von H. A. Lorentz und Fitzgerald erscheint dann als eine zwingende Konsequenz der Theorie. Nur die Vorstellung eines Lichtäthers als des Trägers der elektrischen und magnetischen Kräfte paßt nicht in die hier dargelegte Theorie hinein; elektromagnetische Felder erscheinen nämlich hier nicht als Zustände irgendeiner Materie, sondern als selbständig existierende Dinge, die der ponderablen Materie gleichartig sind und mit ihr das Merkmal der Trägheit gemeinsam haben."

In einem Vortrag auf der Naturforscher-Versammlung 1909 sprach A. Einstein[1]) folgende Gedanken aus:

„Unter Zugrundelegung der Ätherhypothese führte das Experiment dazu, den Äther als unbeweglich anzunehmen. Das Relativitätsprinzip besagt dann, daß alle Naturgesetze in bezug auf ein relativ zum Äther gleichförmig bewegtes Koordinatensystem K' gleich seien den entsprechenden Gesetzen in bezug auf ein relativ zum Äther ruhendes Koordinatensystem K. Ist dem aber so, dann haben wir ebensoviel Grund, uns den Äther als relativ zu K' ruhend vorzustellen, wie als relativ zu K ruhend. Es ist dann überhaupt ganz unnatürlich, eines der beiden Koordinatensysteme K, K' dadurch auszuzeichnen, daß man einen relativ zu ihm ruhenden Äther einführt. Daraus folgt, daß man zu einer befriedigenden Theorie nur dann gelangen kann, wenn man auf die Ätherhypothese verzichtet. Die das Licht konstituierenden elektromagnetischen Felder erscheinen dann nicht mehr als Zustände eines hypothetischen Mediums, sondern als selbständige Gebilde, welche von den Lichtquellen ausgesandt werden, gerade wie nach der Newtonschen Emissionstheorie des Lichtes. Ebenso wie gemäß letzterer Theorie erscheint ein nicht von Strahlung durchsetzter, von ponderabler Materie freier Raum wirklich als leer."

In der in dem Vorwort zitierten Anklageschrift gegen den Äther schreibt N. Campbell auf S. 185, wo er von der Relativgeschwindigkeit zwischen dem angenommenen Äther und dem Beobachter spricht: „Wenn der Äther angesehen wird als der Körper, in welchem die elektrische Energie lokalisiert ist, so scheint

1) A. Einstein, diese Zeitschr. **10**, 819, 1909.

es einleuchtend und einfach, die Punkte des Äthers, welche zur Definition der Geschwindigkeit nötig sind, zu identifizieren durch eben die Energie, welche sie enthalten. Dann würde die Geschwindigkeit des Äthers relativ zum Beobachter sich verschieden ergeben, je nachdem dieser den einen oder den anderen der elektrisch geladenen Körper ins Auge faßte, und sie würde in jedem Falle der Geschwindigkeit gleich erscheinen, welche der entsprechend geladene Körper relativ zum Beobachter zeigt.

§ 6. Dieses, denke ich, ist der einfache und einleuchtende Gesichtspunkt, welcher direkt zu dem Prinzip der Relativität geführt haben würde, hätte nicht der Gebrauch des Wortes ‚Äther' entgegengestanden ..."

Und weiter lesen wir (S. 189): „... Das System, in welchem elektromagnetische Energie lokalisiert ist, hört auf, ein einzelner Körper unabhängig von allen materiellen Körpern zu sein; es wird zu einer Vereinigung von Teilen, welche als zugehörig betrachtet werden müssen zu jedem einzelnen der sich bewegenden geladenen Körper. Wenn der geladene Körper in gleichmäßiger Bewegung gegenüber dem Beobachter begriffen ist, so bewegt sich derjenige Teil des Äthers, in welchem seine Energie lokalisiert ist, mit derselben Geschwindigkeit relativ zum Beobachter."

Hören wir noch, weshalb man nach N. Campbell eine andere Auffassung von der Individualität des Äthers nicht hegen dürfe (Seite 185):

„§ 7. Es ist sofort klar, daß, wenn es nicht erlaubt sein sollte, einen Punkt des Äthers durch die in ihm enthaltene Energie zu identifizieren, kein anderes Mittel der Identifikation sich darbieten würde. Alle optischen Phänomene beweisen, daß der Äther (außerhalb der materiellen Körper) vollkommen homogen ist, insoweit die Fähigkeit, Energie aufzunehmen, in Betracht kommt: die Geschwindigkeit der Strahlung ist geradlinig und gleichförmig, in welcher Richtung auch immer die Strahlung stattfinden möge."

Einwände gegen diese Ausführungen von Einstein und Campbell werden in § 17 und § 19 gemacht werden.

§ 9. Relativitätsgesetze. Bedingtes und unbedingtes Relativitätsprinzip.

Indem ich nun dazu übergehe, die verschiedenen Standpunkte zu formulieren, soll zunächst eine Hypothese vorangestellt werden, welche die Relativivitätsgesetze zusammenfaßt. Ich möchte ihr folgende Fassung geben:

„Zu jeder Schreitung kann man ein System der Gleichzeitigkeit so aufstellen und die Längeneinheiten für die verschiedenen Richtungen so aufeinander beziehen, daß für die Beschreibung der uns bekannten Naturerscheinungen (mit Ausnahme vielleicht der Gravitation) alle Richtungen formal gleichwertig werden. Insbesondere erhalten dabei die elektrodynamischen Felderregungen im Raum frei von Materie für alle Richtungen der Maßzahl nach gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Diesen Raum-Zeit-Systemen kann man für jede Schreitung die Zeit- und die Längen-Einheit so zuordnen, daß alle Systeme für die Beschreibung der Naturerscheinungen (wieder vielleicht mit Ausnahme der Gravitation) formal gleichwertig werden."

Die so entstehenden Raum-Zeit-Systeme werden „Lorentz-Systeme" genannt; sie schließen sich mathematisch zur „Lorentz-Gruppe" zusammen.

„Formal" soll hier heißen: „qualitativ und den Maßzahlen nach". — Das besonders hervorgehobene Verhalten der elektrodynamischen Felderregungen im Raum frei von Materie zeichnet diese Erregungen vor allen übrigen Erregungen aus (z. B. auch vor den elektrodynamischen Felderregungen im Raum, der Materie enthält). — Wir werden bald erkennen, daß die Wahl der Schreitungen nicht völlig frei ist, daß vielmehr die Relativitätsgesetze an ein bestimmt abgegrenztes Gebiet der Schreitungen gebunden sind. Dieser Umstand wird sich als ein Fundament für alle weiteren theoretischen Untersuchungen erweisen. —

Die Relativitätsgesetze sind von H. A. Lorentz im Anschluß an das Ergebnis des Michelsonschen Versuches diskutiert worden. Sie verlangen für die Materie die Lorentz-Fitzgeraldsche Kontraktionshypothese; welche Annahmen man über die Wirkungsweise der Gravitation machen muß, ist zuerst ebenfalls von H. A. Lorentz untersucht worden. — Wie im Vorwort angekündigt, werde ich im folgenden die Annahme machen, daß die Relativitätsgesetze wenigstens bei Ausschluß der Gravitation der Wirklichkeit entsprechen.

An die Relativitätsgesetze knüpfen sich die Diskussionen, um die es sich für die vorliegende Arbeit handelt. Zwei Standpunkte der Auffassung mögen einander entgegengestellt und durch zwei „Prinzipien" gekennzeichnet werden.

Das erste Prinzip nenne ich das bedingte Relativitätsprinzip. Es sagt aus: Die Relativitätsgesetze gelten mit folgenden weiteren Ausführungen: Es gibt einen Äther, dessen

Eigenschaften und dessen Beziehungen zur Materie die Relativitätsgesetze zur Folge haben. Die Gleichwertigkeit der verschiedenen Richtungen in einem einzelnen Lorentz-System, außer in demjenigen der Ruhe gegen den Äther, und die Gleichwertigkeit der verschiedenen Lorentz-Systeme besteht nur formal, nicht physikalisch. Bei den Lorentz-Systemen bedeuten im allgemeinen gleiche Werte für die Zeit an den verschiedenen Orten nicht wirkliche, sondern nur scheinbare Gleichzeitigkeit. Beim Übergang eines materiellen Systems von einer Schreitung zur anderen, erleidet das System reale Änderungen der Dimensionen. — Bei diesem Übergang wird auch die Geschwindigkeit des Ablaufs entsprechender Vorgänge real geändert.

H. A. Lorentz hat in seinen grundlegenden Arbeiten stets nur an dieses Prinzip gedacht.

Das zweite Prinzip nenne ich das unbedingte Relativitätsprinzip. Es lautet: Die Relativitätsgesetze gelten mit den folgenden weiteren Ausführungen. Für das Weltgeschehen ist jedes der Lorentz-Systeme jedem anderen nicht nur formal, sondern physikalisch durchaus gleichwertig. Die Gleichzeitigkeit ist nur ein relativer Begriff, und es gibt daher in der Natur keine eindeutige Weltzeit. Jedes der Lorentz-Systeme ordnet die Ortszeiten in seiner besonderen Art zu einem System der Gleichzeitigkeit und also der Weltzeit zusammen, das den anderen Zusammenfassungen völlig gleichberechtigt ist. Es hat keinen physikalischen Sinn, von realen Änderungen der Dimensionen beim Übergang eines materiellen Systems von einem Bewegungszustand in einen anderen zu sprechen, weil jeder absolute Maßstab für den Vergleich fehlt. Der Anblick ändert sich, das ist alles, was gesagt werden darf. Hierdurch erklärt es sich, daß bei der Beobachtung in einem einzelnen Lorentz-System zwar scheinbar Dimensionsänderungen stattfinden, diese aber bei den verschiedenen gleichberechtigten Lorentz-Systemen bald als Ausdehnungen, bald als Verkürzungen sich darstellen, und zwar in allen möglichen Verhältnissen, von $1:\infty$ bis $1:0$. — Ebensowenig hat es einen physikalischen Sinn, von realen Änderungen in der Geschwindigkeit des Ablaufs der Geschehnisse in einem materiellen System zu reden, wenn das System in eine andere Schreitung gebracht wird. Damit hängt es zusammen, daß diese Änderung der Geschwindigkeit sich in jedem anderen der gleichberechtigten Lorentz-Systeme anders darstellt. — Scheint das unbedingte Relativitätsprinzip zu Widersprüchen mit unserer gewöhnlichen Denkweise zu führen, so ist darin ein Mangel in unserer bisherigen Auffassung von Zeit und Raum zu erkennen. —

Es mag wohl sein, daß ich mit der obigen Formulierung des unbedingten Relativitätsprinzips den Standpunkt von A. Einstein und seiner Nachfolger nicht richtig wiedergegeben habe. Mit um so größerer Sicherheit kann ich aber aus persönlicher Erfahrung behaupten, daß viele der Leser den Eindruck gewinnen, als handele es sich um dieses Prinzip. Darauf aber kommt es an. So scheint es mir bei dem heutigen Stand der Diskussion über das Relativitätsgesetz von Wichtigkeit, wenn das bedingte und das unbedingte Relativitätsprinzip in ihrer Tragweite und ihren Folgerungen verglichen werden. Das wird in den folgenden Ausführungen geschehen.

§ 10. Vorbemerkungen über die Begriffe von Raum und Zeit.

Nach Kant sind Raum und Zeit Anschauungsformen des menschlichen Geistes, so daß wir alles Weltgeschehen nur in Raum und Zeit aufzufassen vermögen. Der heutige Naturforscher wird dieses gewiß anerkennen; indem er aber die fundamentale Hypothese einer Welt außerhalb des menschlichen Geistes annimmt, wird er wohl hinzufügen, daß Raum und Zeit auch objektiv zu dieser Außenwelt gehören, und daß sie Anschauungsformen des menschlichen Geistes gerade deswegen sind, weil der Mensch einen Teil der Welt bildet. Für den Naturforscher entsteht dann zwischen Raum und Zeit in der Welt und in der Vorstellung eine ähnliche Verbindung und auch ein ähnlicher Gegensatz, wie zwischen einem materiellen Ding in der Außenwelt und seinem Gedankenbild im menschlichen Geist. Geradeso, wie diesen Gedankenbildern, objektiv betrachtet, Unvollkommenheiten anhaften, könnte es auch mit unserer Raum-Zeit-Vorstellung der Fall sein; so muß damit gerechnet werden, daß unsere Auffassung von räumlichen und zeitlichen Vorgängen einmal Korrekturen verlangen könnte. Die Vertreter des unbedingten Relativitätsprinzips behaupten, daß diese Zeit gekommen sei.

Es sind mehrere Fragen, die durch die neueren Arbeiten über die Relativität der Naturvorgänge Bedeutung gewonnen haben.

Ich erinnere hier zunächst an Überlegungen, die im Anschluß an die Begriffe „groß und klein" im Raum, sowie „lang und kurz" in der Zeit von den Philosophen seit alters her gern gemacht wurden. Wenn alles in der Welt, wir selbst mit, zwischen Einschlafen und Aufwachen in gleichen Verhältnissen beliebig vielmals

größer oder kleiner geworden wäre: wir würden nichts davon merken. Und wenn das Weltgeschehen beliebig vielmals schneller oder langsamer vor sich ginge als vorher: auch das würde uns entgehen. — Für unsere Beurteilung von Raum und von Zeit fehlt uns eben jeder absolute Maßstab; alles, was wir tun können, ist „vergleichen", und auch dieses ist uns nur möglich, wenn sich uns das zu Vergleichende unter gleichen Bedingungen beieinander darstellt. —

Eine der fundamentalen Fragen, die an uns herantreten, lautet, was „Gleichzeitigkeit" sei? Werden Vorgänge verfolgt, die in unmittelbar beieinander befindlichen Körpern vor sich gehen, so scheint es freilich ohne weiteres klar, daß das zeitliche Geschehen Moment für Moment aufeinander bezogen werden kann, — aber unsere Vorstellung wird sogleich unsicher, wenn die Körper auseinanderrücken. Welche Zeitpunkte sollen dann als „gleichzeitig" aufeinander bezogen werden? Jedenfalls wird eine Zuordnung nur erfolgen können, wenn irgendeine Verbindung hergestellt wird; aber läßt sich dieses, und zwar eindeutig tun? Die Anhänger des unbedingten Relativitätsprinzips werden es verneinen, und zwar mit der Begründung, daß die Gleichzeitigkeit gar kein absoluter, sondern nur ein relativer Begriff sei. Nach dieser Anschauung sollen Ereignisse, die von einem Standpunkt aus beurteilt als gleichzeitig erscheinen, von anderen ganz gleichberechtigten Standpunkten aus als ungleichzeitig sich darstellen können. Selbstverständlich würde zugleich auch der Begriff einer allgemein für alle Orte gültigen Weltzeit beseitigt. —

Denken wir an den Begriff des Raumes mit seinen drei Dimensionen, so entsteht sofort die Frage, wie Längen in verschiedenen Richtungen zu vergleichen seien. Für unsere Vorstellung sind die drei Dimensionen voneinander unabhängig. Wenn also zum Beispiel zwischen Einschlafen und Aufwachen alles in der Welt parallel einer Richtung gleichmäßig zusammengerückt oder auseinandergezogen würde, während in den dazu senkrechten Richtungen alles unverändert bliebe, und wenn nun das Weltgeschehen sich dieser Neuordnung ebenso wie der früheren anpaßte, so würden wir die Änderung gar nicht bemerken können. Ja, auch bei wachen Sinnen könnte uns die Änderung entgehen, wenn sie zum Beispiel während einer Bewegungsänderung aufträte, denn es wäre möglich, die etwa empfundenen Störungen als Begleiterscheinungen der Bewegungsänderung zu deuten. — Diese Überlegungen werden zeigen, daß der Erfahrungssatz: „Jeder Körper, der nacheinander irgend zwei Lagen in Ruhe einnimmt und dabei frei seinen inneren Kräften folgen kann, zeigt in beiden dieselben Dimensionen" nichts darüber aussagt, ob Änderungen der Dimension bei der Drehung stattfinden oder nicht. Der Satz behauptet vielmehr nur, daß alle materiellen Körper — die Maßstäbe sowohl, wie irgendwelche andere Körper —, wenn sie bei vorgegebenen Lagen zwischen bestimmten Punktenpaaren gleiche Abstände zeigen, dieses auch nach beliebigen Drehungen tun, sofern dabei die Punktepaare wieder in die zur einwandfreien Längenvergleichung erforderliche parallele Orientierung gebracht werden. —

Ganz besonders wichtig ist für uns weiter die Frage nach der Längenvergleichung bei verschiedenen Schreitungen. Wir können uns hier darauf beschränken, den Fall der Längenvergleichung parallel der Richtung der relativen Bewegung zu untersuchen. Es wird auch genügen, die Vorstellung speziell an zwei gleiche Stäbe irgendwelchen Materials zu knüpfen, und nur auf die ganzen Längen von Ende zu Ende zu achten. Wir wollen annehmen, daß die Stäbe genau gleiche Länge zeigen, wenn sie in relativer Ruhe aneinandergelegt werden. Nun mögen sie parallel der Längsrichtung in gleichmäßige, relative Bewegung gebracht werden, und zwar so, daß sie beide in gleichbleibender Schreitung verharren und dabei ohne jede Hemmung die den inneren Kräften entsprechenden Längen annehmen können. Wie kann dann festgestellt werden, ob die Längen nun noch gleich oder etwa verschieden sind? Die alltägliche Übung wird schnell eine Antwort bereit haben, etwa diese: „Die Längen sind dann gleich oder ungleich, wenn die entsprechenden Enden gleichzeitig oder ungleichzeitig aneinander vorübergehen." Sofort erkennen wir aber, daß hier als bekannt angenommen wird, was „gleichzeitig" ist, und es wird klar, daß die beiden Probleme der Beurteilung der Gleichzeitigkeit und der Vergleichung der Längen bei verschiedenem Bewegungszustand unmittelbar zusammenhängen. Hier sehen wir auch ein Band sich knüpfen, das Zeit- und Raumauffassung miteinander verbindet.

§ 11. Raum-Zeit-Systeme.

Zur Vereinfachung der Darstellung wollen wir uns auf einem Weltkörper wohnend denken, der außer dem Bereich merklicher Einwirkung von anderen Körpern ist und auch keine Drehung ausführt. Sein Bewegungszustand ist also eine gleichbleibende Schreitung und erscheint relativ zu jedem anderen materiellen

System gleichartigen Bewegungszustandes als gleichmäßige Parallelverschiebung. Der Weltkörper mag „isolierte Erde" genannt werden. Es wird für unsere Zwecke oft genügen, wenn nur eine einzige der drei räumlichen Dimensionen beachtet wird; als solche soll stets die z-Richtung gewählt werden. Dann sind alle Längen, alle Entfernungen, alle Geschwindigkeiten, von denen gesprochen wird, parallel dieser z-Richtung zu denken.

Wir müssen als möglich ansehen, daß unsere Maßstäbe bei der Änderung ihrer Schreitung und ihrer Orientierung ihre Dimensionen ändern. Für die Messung entsteht dabei keine Schwierigkeit, wenn man darauf achtet, daß der Bewegungszustand bei der Messung selbst stets der gleiche ist. Dies geschieht zum Beispiel, wenn der Maßstab bei der Messung in Ruhe gegenüber der Erde gehalten wird. — Hiernach können wir annehmen, daß für das betrachtete materielle System (die isolierte Erde) das System der Raumkoordinaten völlig bestimmt ist, wenn der Koordinaten-Anfangspunkt und die Längeneinheit festgesetzt sind.

Es kann und soll angenommen werden, daß Uhren genau gleichen Ganges zur Verfügung stehen, die an den verschiedenen Stellen des materiellen Systemes (der isolierten Erde) aufgestellt werden können. Dann ist es ohne weiteres möglich, den Ablauf der Zeit an den verschiedenen Orten des materiellen Systemes in der gleichen Zeiteinheit zu verfolgen. Offen bleibt aber die Frage, welche Zeitpunkte an den verschiedenen Orten als gleichzeitig gelten sollen.

Vorerst mag bemerkt werden, daß die Beurteilung der Konstanz einer Geschwindigkeit parallel irgendeiner Richtung etwa der z-Richtung, ohne alle theoretischen Bedenken geschehen kann. Für die Ausbreitung von Erregungen (Schall, Licht usw.) ist dies sogleich klar, denn sobald die physikalischen Bedingungen auf dem Wege gleichgemacht werden, darf eine gleichgemäßige Fortbewegung angenommen werden. Die Behauptung gilt aber auch für die Bewegung materieller Körper. Handelt es sich zum Beispiel um einen relativ zur isolierten Erde sich bewegenden Körper, so genügt es, wenn in den verschiedenen passierten Orten an den dort aufgestellten Uhren diejenigen Zeitintervalle beobachtet und gleichgefunden werden, in welchen zwei am bewegten Körper selbst angebrachte Marken nacheinander eintreffen.

Es finde nun irgendeine gleichmäßige Bewegung einer Erregung oder eines Körpers parallel z statt. Die Zeitpunkte des Eintreffens bei den verschiedenen Ordinaten $z_0 = 0$, z_1, z_2, ... seien t_0, t_1, t_2, ..., wenn sie an den zunächst irgendwie eingestellten Uhren daselbst abgelesen werden. Dann ist zu schließen, daß als gleichzeitig nur solche Zeitpunkte gelten können, die durch

$$t_0,\ t_1 - \beta z_1,\ t_2 - \beta z_2,\ \ldots .$$

zusammengefaßt sind, wobei β eine für alle Orte (0), (1), (2), ... gleiche Konstante darstellt. β bedeutet den reziproken Wert der uns unbekannten relativen Geschwindigkeit. Durch das angenommene Experiment wird also die Unsicherheit in der Feststellung der Gleichzeitigkeit für das materielle System auf Unbestimmtheit eines einzigen Konstanten β zurückgeführt.

Die Uhren mögen nun so eingestellt werden, daß sie alle bei der Wiederholung des Experimentes genau gleichen Stand für das Eintreffen des Körpers oder der Erregung zeigen. Dann ist ein alle Punkte umfassendes Zeitsystem festgesetzt; $t^{(c)}$ sei die so bestimmte Zeit. Dieses Zeitsystem erfüllt aber jedenfalls nicht die Bedingung, daß gleiche Zeitmomente an den verschiedenen Orten durch gleiche Werte von $t^{(c)}$ angegeben werden. Fand zum Beispiel die Bewegung des Körpers oder der Erregung in der Richtung der wachsenden z statt, so ist sicher, daß das Zeitsystem $t^{(c)}$ Angaben macht, die nach der Seite der wachsenden z hin verfrühte und nach der Seite der abnehmenden z hin verspätete Zeitpunkte bezeichnen. — Ein Zeitsystem t, das Gleichzeitigkeit durch gleiche Angaben kennzeichnen soll, muß mit $t^{(c)}$ durch die Beziehung

$$t = t^{(c)} + \beta z \qquad (52)$$

zusammenhängen. Jedes der physikalisch möglich scheinenden Zeitsysteme wird durch einen bestimmten Wert der Konstanten β angezeigt. Fand bei dem Experiment zur Herstellung des Zeitsystems $t^{(c)}$ die Bewegung in der positiven Richtung von z statt, so muß jedenfalls $\beta > 0$ sein. — Nun werde ein zweites Experiment zur Hilfe genommen, bei dem der Körper oder die Erregung entgegengesetzt der Richtung wie beim ersten Experiment läuft. Dann ergibt die Beobachtung den Zeitpunkt des Passierens der verschiedenen Ordinaten z, wie sofort ersichtlich, eine obere Grenze für den Wert von β. Die Unsicherheit der Feststellung eines Zeitsystems t, welches Gleichzeitigkeit durch gleiche Angaben darstellen soll, erscheint so nach beiden Seiten hin in Grenzen eingeschlossen. Man wird auch ohne weiteres erkennen, daß die Grenzen sich um so mehr verengern, je größere Geschwindigkeiten des Körpers oder der Erregung zu Hilfe genommen werden. In der Formel (52) drückt sich dieses dadurch aus, daß immer

näherliegende Wertepaare gefunden werden, zwischen denen β liegen muß.

Zur weiteren Erläuterung dieser Erwägungen können noch folgende Bilder dienen. Es möge der Schall in Luft zur Zeitübertragung verwendet werden. Zwei Orte A und B im Abstand von 333 m, A mit $z = 0$, B mit $z = 333$ m werden gewählt. Man schickt den Schall erst von B nach A, dann umgekehrt. Es kann dabei vorteilhafterweise die Reflexion in A benutzt werden, wodurch beide Experimente unmittelbar aneinander geschlossen werden. Der Schall trifft in diesem Fall 2 Sekunden, nachdem er von B ausging, wieder dort ein. Der Zeitpunkt t_B in B, der dann als gleichzeitig gelten kann mit demjenigen Zeitpunkt t_A, in welchem der Schall in A eintrifft und reflektiert wird, muß jedenfalls in jenem Zeitintervall von 2 Sekunden liegen, das durch Aussenden und Wiedereintreffen des Schalles in B abgegrenzt wird. Für den Wert von β in (52) ergibt sich so ein offenes Intervall von

$$\frac{2}{333} \text{ (Meter/Sekunden)}.$$

Wird statt der Schallausbreitung in Luft etwa diejenige in Eisendrähten benutzt, so reduziert sich die Unsicherheit auf 2 Sekunden in erst 5 km Abstand, das Intervall für β wird also ca. 15 mal enger. Die schnellste von Menschen beobachtete Bewegung ist die des Lichtes im leeren Raum; wird sie für die Zeitübertragung verwertet, so bleibt als Unbestimmtheit in der Feststellung der Gleichzeitigkeit für einen Abstand von 150 Kilometer nur noch $^1/_{1000}$ Sekunde. Dies nun ist die Unbestimmtheit, an welche die Theorie der Relativität geknüpft ist. Wie mir scheint, wird bei den heutigen Diskussionen nicht immer genügend auf die Kleinheit des offen bleibenden Intervalls geachtet. Manch' einer, der sich jetzt den neuen Vorstellungen über die Relativität der Zeit zuneigt, weil er neue philosophische Perspektiven sich öffnen sieht, wird vielleicht stutzig werden und viel des Interesses verlieren, wenn er sieht, wie enge die Grenzen sind, welche seiner Phantasie gesteckt werden. Er wird nun vielleicht williger werden, es auffällig zu finden, daß die Verknüpfung von Zeit und Raum gerade durch die Lichtbewegung definitive Grenzen finden solle, und wird der Frage leichter sein Ohr leihen, was die Lichtbewegung hier für einen prinzipiellen Vorrang zum Beispiel vor der Schallbewegung haben solle? —

Die so erweckten Bedenken mögen uns weiterhin begleiten, wir dürfen ihnen aber noch nicht Raum geben. Wir wollen nur beachten, daß das unbedingte Relativitätsprinzip behauptet, es handele sich bei dem durch die Lichtübertragung offen gelassenen Intervall nicht nur um eine Unsicherheit, welche der hier angenommenen Methode der Zeitbestimmung zur Last zu legen ist, sondern um eine Unbestimmtheit, die in dem Wesen der Zeit selbst begründet ist. Danach sollen nämlich alle Zeitsysteme des noch offen bleibenden Bereiches für das Weltgeschehen gleichwertig sein. — Da wir uns noch nicht für eine bestimmte Stellungnahme entscheiden, so begnügen wir uns mit der Feststellung, daß nach den besprochenen Beobachtungen in (52) die Konstante β innerhalb eines gewissen Intervalles unbestimmt bleibt. Weil die Elektrodynamik aus unseren Betrachtungen zunächst ausgeschaltet werden soll, also das Licht nicht zu Hilfe genommen werden darf, möge jede nähere Angabe über die Abgrenzung des offenen Intervalles fürs erste noch vermieden werden.

Wir wollen aber annehmen, daß der Beobachter, den wir uns auf der isolierten Erde denken, darauf ausgeht, die Gleichzeitigkeit mit neuen Hilfsmitteln genauer festzustellen. Er beginnt damit, gegenüber der isolierten Erde „gleiche" Geschwindigkeiten nach entgegengesetzten Seiten (in der $+z$- und $-z$-Richtung) herzustellen. Dazu bieten sich ihm sogleich 3 Methoden, die als „Erregungsmethode" „Schleudermethode" und „Längenmethode" bezeichnet werden sollen. Bei der Erregungsmethode wird angenommen, daß Erregungen (wie Schall und Licht) unter sonst gleichen physikalischen Bedingungen nach den beiden entgegengesetzten Seiten mit gleicher Geschwindigkeit laufen. — Die Schleudermethode setzt voraus, daß gleiche Körper, die nach entgegengesetzten Richtungen durch gleiche Mittel in Bewegung gesetzt werden, gleiche relative Geschwindigkeiten erlangen. — Die Längenmethode endlich nimmt an, daß gleiche relative Geschwindigkeiten angezeigt werden, wenn bei der nacheinander erfolgenden Bewegung desselben Körpers (etwa eines Stabes) in gleicher Orientierung nach den beiden entgegengesetzten Richtungen jene beiden Zeitintervalle einander gleich sind, in welchen zwei bestimmte Stellen des Körpers (etwa die Enden des Stabes) aufeinander folgend an einer Marke auf der isolierten Erde vorübergehen. Nach den Gesetzen der Relativität nehmen wir an, daß zwei entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten, die nach einer der drei Methoden als gleich erscheinen, es stets auch nach den beiden anderen tun. Dem Beobachter auf der isolierten Erde wird es dann möglich scheinen, die Gleichzeitigkeit in aller Schärfe fest-

zustellen oder wenigstens zu definieren. Als besonders bequem für die theoretischen Überlegungen bietet sich folgendes Verfahren. Es handele sich um die beiden Orte A und B. Zwei Erregungen (oder zwei Körper) von entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit werden so ausgesandt, daß sie gleichzeitig A passieren, die eine von B kommend, die andere nach B gehend. Dann erscheint der so für A bestimmte Zeitpunkt als gleichzeitig mit demjenigen Zeitpunkt in B, der gerade in der Mitte des Intervalles liegt, in dem B von den beiden Erregungen (oder Körpern) passiert wird.

Ein Beobachter, der nicht über die gewöhnliche Erfahrung hinaus denkt, wird so glauben können, er habe die Gleichzeitigkeit in einem allgemein für die Welt gültigen Sinne festgestellt und habe also die Grundlagen für den Aufbau einer natürlichen eindeutigen Weltzeit gewonnen. Wer weiter denkt, wird sich freilich sagen müssen, daß es dem Menschen ja nicht gegeben ist, alle Dinge der Welt zu erkennen und alle Zusammenhänge zu überblicken, und wird daher Zweifeln Raum geben. Damit ist er dann zum Scheideweg gelangt. Der eine Wegweiser lautet: „bedingtes Relativitätsprinzip" mit dem Endziel „Äther", der andere: „unbedingtes Relativitätsprinzip" mit dem Endziel „Zeit als nur relativer Begriff". — Verfolgen wir zunächst den Weg „bedingtes Relativitätsprinzip". Der Beobachter überlegt bei sich, daß außer den Dingen, die er grob-sinnlich kennen lernt, noch andere nicht so offensichtliche auf seine Experimente Einfluß haben könnten. So wird für ihn die Frage auftauchen, ob die als „entgegengesetzt gleich" sich darstellenden Geschwindigkeiten denn auch wirklich so weit als gleich gelten können, daß die Annahme erlaubt ist, gleiche Strecken würden in gleicher Zeit durchlaufen? Ein sehr naheliegendes Beispiel kann ihn in seinen Bedenken bestärken: Weht ein Wind, so ist die Zeit, die der Schall zwischen zwei Punkten braucht, für die beiden Richtungen durchaus nicht gleich groß. — Wenn also irgend etwas bei den Experimenten mitwirkte, was einseitig die Geschehnisse beeinflußte, so müßte der Beobachter seine zunächst gefaßte Meinung, die wirkliche Gleichzeitigkeit gefunden zu haben, fallen lassen.

Wir wollen annehmen, daß der Beobachter dies bedenkt und sich darum entschließt, einen Kontrollversuch zu machen. Zu dem Zweck begibt er sich von der isolierten Erde auf ein anderes materielles System, was gegen die isolierte Erde in gleichmäßiger Parallelverschiebung begriffen ist. Es handelt sich ja nur um gedachte Experimente rein theoretischer Bedeutung, so können wir zur Unterstützung der Anschauung annehmen, daß es sich um einen zweiten Weltkörper der gleichen Art wie die isolierte Erde handelt, oder auch, was für unsere Darstellung bequemer ist, daß das zweite System einen Eisenbahnzug auf der isolierten Erde darstellt, der ohne jede Erschütterung dahinfährt. Dieses zweite Bild mag hier festgehalten werden. — Auf der „Eisenbahn" wiederholt unser Beobachter alle Operationen zur Feststellung der Gleichzeitigkeit. Dazu werden zunächst an den verschiedenen Orten im Zuge gleiche Uhren aufgestellt usw. Der Beobachter wird nun so urteilen: Wäre es erlaubt, in der Welt ein materielles System, wie die „isolierte Erde" oder den „Eisenbahnzug" als etwas schon in sich Selbständiges zu betrachten, so müßten die beiden gewonnenen Zeitsysteme in bezug auf die Gleichzeitigkeit genau übereinstimmen; bei passender Wahl der Zeiteinheiten müßten sie überhaupt identisch werden. Um im Falle der isolierten Erde und des Eisenbahnzuges die Probe zu machen, ist jede der Uhren auf dem Zuge stets mit denjenigen Uhren auf der isolierten Erde zu vergleichen, an denen sie gerade vorbeifährt, das heißt, mit denen sie gerade am gleichen Ort in der Gesamtwelt ist. Wir nehmen die Gültigkeit der im vorigen Paragraphen definierten Relativitätsgesetze an, daher ist zu schließen, daß als Resultat der Probe sich ein Widerspruch zwischen den beiden Systemen der „Gleichzeitigkeit" ergeben wird. Der Beobachter wird hierin eine Bestätigung seiner Bedenken erblicken, und nun nach dem Element in der Welt außer der für seine Sinne wahrnehmbaren Materie suchen, was, unabhängig von dieser, das Weltgeschehen beeinflußt und so bewirkt, daß die verwerteten Methoden zur Herstellung entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeiten doch nicht Relativgeschwindigkeiten ergeben, die für den Verlauf der Zeit gleichwertig sind. —

Ganz anders werden die Überlegungen, wenn unser Beobachter am Scheideweg den Weg zum unbedingten Relativitätsprinzip einschlägt. Auch er wird sich bewogen finden, den oben beschriebenen Kontrollversuch zu machen, er wird sein Resultat aber anders deuten und wird etwa in folgender Art schließen: Da die Beobachtung nun nicht mehr von der isolierten Erde, sondern von der Eisenbahn aus erfolgt, so ist der Standpunkt wesentlich geändert, von dem aus das Weltgeschehen beurteilt wird. So ist auch das Urteil über die Vorgänge auf der isolierten Erde nun ein anderes als vorhin. Die Änderung des Standpunktes zeigt sich ja deutlich darin, daß die isolierte Erde sich relativ zum Beobachter bewegt. Dies aber gibt

eine Einseitigkeit in der Beurteilung der Vorgänge auf ihr; damit erklärt es sich, daß die beiden Relativgeschwindigkeiten, die von der isolierten Erde aus beurteilt als gleich gelten müssen, nun doch nicht mehr als gleichwertig für die Zeitanschauung des Beobachters auf der Eisenbahn angesehen werden können. Aus der Verschiedenheit der Ergebnisse über die Gleichzeitigkeit ist demgemäß zu folgern, daß die Gleichzeitigkeit kein absoluter Begriff ist, sondern sich stets anders darstellt, wenn der Beobachter selbst von einem Bewegungszustand zu einem anderen übergeht. —

Der Beobachter auf dem Weg zum bedingten Relativitätsprinzip wird gegen diese Schlüsse einwenden, daß es nicht gerechtfertigt scheint, nun mit einem Male dem menschlichen Geist ein Urteil über das Wesen der Zeit abzustreiten, denn darauf käme es hinaus, wenn man ein und und dieselben Ereignisse bald als gleichzeitig, bald als ungleichzeitig erklären solle. Die Annahme, daß in der Außenwelt etwas vorhanden sei, was unabhängig von der Materie und ihren Bewegungen wäre, sei einfach und naturgemäß. — Der Beobachter auf dem Weg zum unbedingten Relativitätsprinzip wird dagegen sagen, daß die letztere Annahme keineswegs natürlich, sondern künstlich sei, da gar kein Anzeichen für dieses hypothetische „Etwas" vorhanden sei. Die Annahme, daß der menschliche Geist in seiner bisherigen Übung den Begriff der Zeit nicht erschöpfend erfaßt habe, sei angesichts der Beobachtungsergebnisse sehr naheliegend und entspreche der Erfahrung, daß der Mensch oft genug sich genötigt gesehen hat, seine Anschauungen über das Weltgeschehen zu wechseln. —

So ist denn die Streitfrage nun aufgeworfen; wir werden unsere Aufgabe zunächst darin sehen, nach weiterem Beobachtungsmaterial für ihre Bearbeitung zu suchen.

(Fortsetzung und Schluß der Arbeit folgt in der nächsten Nummer.)

(Eingegangen 26. Juli 1911.)

Die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner Kugeln in Luft bei vermindertem Druck.

(The Terminal Velocity of Fall of Small Spheres in Air at Reduced Pressures.)

Von L. W. Mc Keehan.

§ 1. Einleitung.

Wie Stokes abgeleitet hat[1]), ist die Endgeschwindigkeit einer frei fallenden Kugel, wenn alle übrigen Widerstände gegenüber dem von der inneren Reibung der Flüssigkeit, durch welche die Kugel hindurchfällt, herrührenden vernachlässigt werden können, und wenn man annimmt, daß an der Trennungsfläche kein Gleiten stattfindet,

$$V = \frac{2}{9} \frac{g a^2 (\sigma - \varrho)}{\mu}.$$

In dieser Formel ist μ der Koeffizient der inneren Reibung der Flüssigkeit, a der Halbmesser der Kugel, V die Fallgeschwindigkeit, g die Schwerkraftsbeschleunigung, σ die Dichte der Kugel und ϱ die Dichte der Flüssigkeit. Dadurch, daß alle Widerstände bis auf den der inneren Reibung ausgeschlossen werden, wird das Anwendungsgebiet der Formel auf sehr kleine Kugeln beschränkt, denn die Bedingung, die erfüllt sein muß, ist, daß der Halbmesser der Kugel klein sein muß gegenüber $\frac{\mu}{V\varrho}$.

Experimentaluntersuchungen von Herrn Professor Zeleny und dem Verfasser[1]) haben dargetan, daß diese Formel gültig ist für Kugeln aus Wachs mit einem Halbmesser von 0,002 cm bis zu 0,00035 cm, für Kugeln aus Paraffin mit einem Halbmesser von 0,002 cm bis zu 0,0005 cm und für Kugeln aus Quecksilber mit einem Halbmesser von 0,001 cm bis zu 0,00016 cm. Allerdings sind die Messungen an dem letztgenannten Material wegen des hohen Reflexionsvermögens der Oberfläche weniger genau als die an den übrigen Materialien.

Bei früheren Versuchen, bei denen wir natürliche Sporen als angenäherte Kügelchen benutzt hatten[2]), beobachteten wir große Abweichungen von der Formel, die Stokes angegeben hat, und zwar bewegten sich die Sporen sämtlich zu langsam, um mit der Formel im Einklang zu sein. Auf der Versammlung der British Association for the Advancement of Science zu Winnipeg im August 1909 meinte Sir Joseph Larmor, Versuche bei tieferen Drucken würden dazu dienen, zu entscheiden, ob diese Abweichungen von der Bildung von Wirbeln in der Luft in der Nähe der nicht vollkommen kugelförmigen Sporen herrührten. Die Kraft, die erforderlich ist, um solche Wirbel zu erhalten, würde mit der Dichte des Gases abnehmen, während der ausschließlich von der inneren Reibung herrührende Widerstand konstant bleiben müßte, da μ, wenigstens innerhalb eines sehr großen Bereiches, vom Drucke unabhängig ist[3]). Wenn die großen Abweichungen, die wir an Sporen beobachtet

1) G. G. Stokes, Mathematical and Physical Papers **3**, 59.

1) John Zeleny and L. W. Mc Keehan, Phys. Rev. **30**, 535, 1910 und diese Zeitschr. **11**, 78, 1910.

2) a. a. O.

3) Weinstein, Thermodynamik und Kinetik der Körper **1**, 325.

haben, von dieser Ursache herrührten, so müßte die Endgeschwindigkeit des Falles bei tieferen Drucken größer sein als bei Atmosphärendruck und einer engeren Übereinstimmung mit dem Werte zustreben, der sich aus der Formel von Stokes ergibt.

Es wurden einige Versuche bei tiefem Druck mit Sporen von Lykopodium ausgeführt. Diese Versuche zeigten allerdings eine Zunahme der Endgeschwindigkeit, aber diese Zunahme war viel zu groß, um auf der vermuteten Ursache beruhen zu können; die Geschwindigkeit wurde nämlich bei niederen Drucken mehrere Male so groß wie die auf Grund der Formel berechnete. Ähnliche Versuche wurden alsdann mit vollkommenen Kugeln aus Wachs angestellt, die bei Atmosphärendruck der Stokesschen Formel genügen. Diese Versuche zeigten ebenfalls eine große Zunahme der Endgeschwindigkeit bei Druckverminderung. Die hierbei gewonnenen Ergebnisse bilden den experimentellen Teil der vorliegenden Arbeit. Dieses Versagen der Stokesschen Formel ist darauf zurückzuführen, daß Stokes bei seiner Ableitung der Formel das Gleiten außer acht gelassen hat. Es läßt sich leicht zeigen, daß dieses Gleiten des Gases längs der Oberfläche der Kugel von der Bewegung in einem diskontinuierlichen Medium nicht zu trennen ist, und daß es bei Druckverminderung an Bedeutung in dem Maße zunimmt wie der mittlere gegenseitige Abstand der Moleküle.

Die Notwendigkeit des Gleitens wird aus folgender Betrachtung ersichtlich. Die Oberflächenschicht der Moleküle in einem Gase, das sich längs einer festen Fläche bewegt, läßt sich in zwei Gruppen zerlegen. Die erste Gruppe besteht aus solchen Molekülen, welche die Oberfläche noch nicht getroffen haben. Ihre mittlere Geschwindigkeit wird eine Komponente parallel zur Oberfläche der entfernteren Gasschicht besitzen, aus der sie kommen. Die zweite Gruppe besteht aus jenen Molekülen, welche bereits die Oberfläche getroffen haben. Ihre mittlere Geschwindigkeit wird eine Komponente parallel zu der Oberfläche haben, die kleiner ist als die Komponente der ersten Gruppe, aber größer als Null, sofern die Zusammenstöße nicht vollkommen unelastisch sind. In jedem Falle wird die mittlere Geschwindigkeit beider Gruppen zusammen, also die mittlere Geschwindigkeit der Gasschicht im ganzen, eine tangentiale Komponente haben, oder mit anderen Worten, es wird ein Gleiten zwischen dem Gas und der Oberfläche des festen Körpers stattfinden.

§ 2. Theorie.

Eine theoretische Behandlung des Falles hat Herr Professor E. Cunningham in einer Arbeit über die Geschwindigkeit des stetigen Falles kugelförmiger Teilchen durch ein flüssiges Medium[1]) gegeben, die Sir Joseph Larmor im Januar 1910 der Royal Society of London vorgelegt hat. Cunningham erhält für die Endgeschwindigkeit des Falles einer kleinen Kugel in einem Gase als allgemeinen Ausdruck die Formel:

$$V = V_s \left(1 + A \frac{l}{a}\right),$$

wo V_s die Geschwindigkeit ist, wie sie die Stokessche Formel angibt, l die mittlere freie Weglänge des Gasmoleküls, a der Halbmesser der Kugel und A eine Konstante ist, deren zahlenmäßiger Wert davon abhängig ist, welche Annahme man über die Stöße der Gasmoleküle gegen die Kugeloberfläche macht. Eine Prüfung der Ergebnisse, die Cunningham erhalten hat, hat einige Ungenauigkeiten aufgedeckt. Wenn man diese berichtigt, so ergeben sich andere Werte für A als die, welche er erhalten hat.

Nehmen wir zunächst einmal an, daß die Zusammenstöße von der Art der Zusammenstöße weicher elastischer Kugeln sind. Der Wert von A ist dann 1,5[2]). Demnächst wollen wir annehmen, daß jedes auftreffende Molekül in die Oberflächenschicht des Teilchens (ob eine Schicht des festen Materiales oder eine Schicht verdichteten Gases, ist für den vorliegenden Zweck unwesentlich) eintritt und aus derselben Fläche, auf die es aufgetroffen ist, wieder austritt, aber mit einer Geschwindigkeit, die der Richtung nach unabhängig ist von der relativen Geschwindigkeit der Kugel und des Teilchens vor dem Zusammenstoße, aber denselben quadratischen Mittelwert hat; der Wert von A ist dann 1,2. Nehmen wir an, ein Bruchteil f der Zusammenstöße gehöre der ersteren Art an, die übrigen der letzteren; der Wert von A ist alsdann $1{,}5 \cdot \frac{4}{5-f}$. Diese Annahmen umfassen die Fälle, die Cunningham behandelt hat; Cunningham hat in dem kombinierten Falle $A = 1{,}63 \frac{1}{2-f}$ erhalten.

Als weiteren Grenzfall wollen wir annehmen, daß ein Molekül des Gases, nachdem es die

1) E. Cunningham, On the Velocity of Steady Fall of Spherical Particles through Fluid Medium. Proc. Roy. Soc. **83** A, 357, 1910.

2) In einer Notiz, die im Märzheft der Phys. Rev. **32**, 341, 1911 veröffentlicht worden ist, ist eine der Substitutionen unrichtig ausgeführt; infolgedessen ist der Zahlenwert des konstanten Multiplikators von $\frac{1}{a}$ dort falsch angegeben. Auf diesen Fehler hat mich Herr Professor R. A. Millikan hingewiesen, der die Freundlichkeit gehabt hat, einen Teil der zu den hier mitgeteilten Ergebnissen führenden Analysis durchzusehen.

Oberfläche eines Teilchens getroffen hat, diese nur dann wieder zu verlassen vermag, wenn es sich in Richtung der Normalen zur Oberfläche bewegt. Der Wert von A ist dann 1,05.

Da die mittlere freie Weglänge l des Gasmoleküles dem Drucke p des Gases umgekehrt proportional ist, so kann man auch die gleichbedeutende Formel

$$V = V_1\left(1 + \frac{B}{pa}\right)$$

benutzen, die für die experimentelle Bestätigung bequemer ist.

Berechnen wir den Wert von B aus dem Werte von A unter Zugrundelegung des Wertes $\mu = 1833 \times 10^{-7}$ bei 20° C[1]), so erhalten wir, wenn wir p in mm Hg ausdrücken, folgende Werte:

für A	B
1,0	0,0075
1,05	0,0078
1,2	0,0090
1,5	0,0112

Die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner Kugeln müßte also bei sehr niedrigen Drucken gewaltig zunehmen und müßte dann dem Halbmesser der Kugel proportional werden, und nicht, wie bei höheren Drucken, dem Quadrate des Halbmessers. Sie müßte ferner umgekehrt proportional dem Drucke sein. In den Fig. 1 und 2 sind als Abszissen die reziproken Werte der errechneten Geschwindigkeiten aufgetragen, das heißt die Zeiten, die zum Durchfallen einer Strecke von einem Zentimeter bei diesen Geschwindigkeiten erforderlich sind, und als Ordinaten die Drucke in mm Hg. Die Temperatur ist zu 20° C angenommen, und für die Konstante ist der Wert $A = 1{,}0$ gewählt worden, da, wie weiter unten gezeigt werden soll, dies der experimentell gefundene Wert ist. In Fig. 1 sind sechs Kurven für verschiedene Werte des Halbmessers gezeichnet, und der Wert für jede einzelne Kurve ist am oberen Rande in cm 10^{-4} angegeben. Fig. 2 zeigt das in Fig. 1 fortgelassene Stück in der Nähe des Nullpunktes in stark vergrößertem Maßstabe. Es muß hier auf die enge Annäherung an eine lineare Änderung der Fallzeit mit dem Drucke hingewiesen werden. Bei der Auswertung ergibt sich, daß das oben angegebene Merkmal für eine stetige Bewegung von allen dargestellten Größen bei sämtlichen Drucken erfüllt wird.

Es ist die Annahme gemacht worden, daß μ bei allen Drucken denselben Wert hat. Dies

1) R. A. Millikan, Phil. Mag. (6) **19**, 215, 1910; $\mu = 1863 \times 10^{-7}$ bei 26° C.

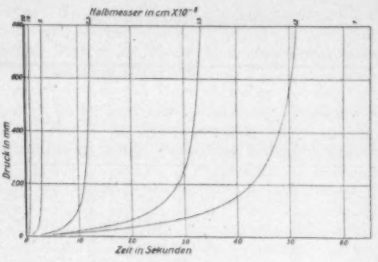


Fig. 1.

fordert die kinetische Gastheorie, und es erscheint wahrscheinlich, daß die bei niederen Drucken experimentell gewonnenen Werte von μ nur deshalb etwas niedriger sind als bei Atmosphärendruck, weil das Gleiten vernachlässigt

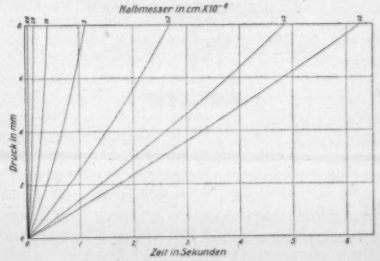


Fig. 2.

worden ist. Aus diesem Grunde hängt der Druck, bei welchem μ eine ausgeprägte Abnahme zeigt, von der Methode zur Bestimmung von μ und von den Abmessungen des benutzten Apparates ab.

§ 3. Versuche.

1. Herstellung des Materiales. Winzige Wachskügelchen wurden mittelst eines Zerstäubers hergestellt[1]) und in der Weise gesammelt, daß ich die Wolke der so gebildeten Kugeln in einem geschlossenen Raume von ungefähr $40 \times 40 \times 60$ cm sich auf Papierblätter ablagern ließ. Der erhaltene Größenbereich ließ sich durch Verstellen der Größe und der Öffnungen des Zerstäubers und durch Änderung der Temperatur des Wachses verändern.

1) Dasselbe Verfahren wurde bereits in unserer oben erwähnten früheren Arbeit benutzt, in welcher auch Mikrophotogramme dieser vollkommenen Kügelchen abgebildet sind.

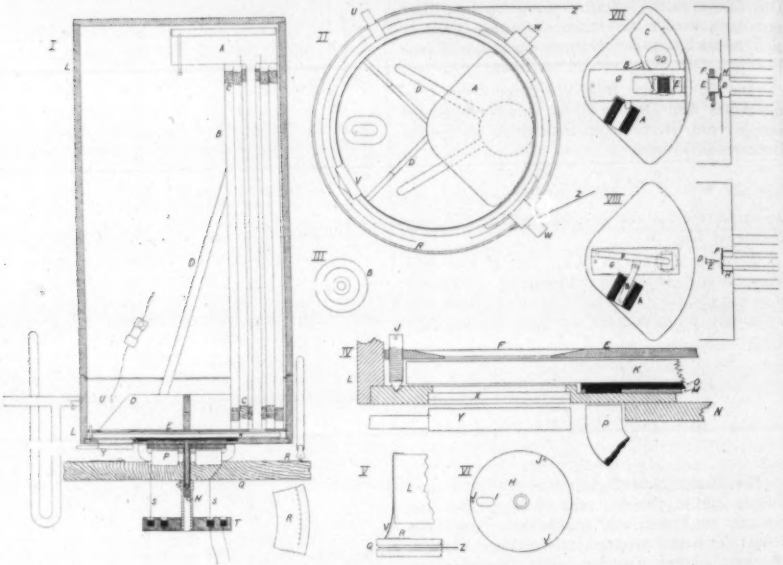


Fig. 3.

2. Messungen. Um den Wert von B in der Formel

$$V = \frac{2}{9}\,\frac{g a^2 (\sigma - \varrho)}{\mu}\left(1 + \frac{B}{ap}\right)$$

zu finden, bestimmte ich die Werte für die Dichte σ einer Kugel, für ihren Halbmesser a, für die Endgeschwindigkeit V ihres Falles und für den Druck p des Gases in mm Hg für mehr als sechshundert Wachskügelchen.

3. Dichte. Die Dichte σ des Wachses war, wie früher bestimmt[1]), 1,058.

4. Endgeschwindigkeit des Falles. Die Methode zur Ermittelung der Endgeschwindigkeit des Falles, V, war dieselbe wie die bei den früheren Versuchen benutzte. Sie bestand in der Messung der Gesamtzeit, die zum Durchfallen einer bekannten Strecke von ungefähr 31 cm erforderlich war.

In Fig. 3 ist die Zeichnung I ein vertikaler Schnitt durch den Apparat; II ist ein Aufriß des Apparates mit abgenommenem Deckel; III ist ein Horizontalschnitt durch das Rohr, in dem die Kugeln fielen; IV ist eine vergrößerte Ansicht der unteren linken Ecke von I, V und VI zeigen Einzelheiten solcher Teile, die an anderer Stelle nicht dargestellt sind; VII und VIII sind Aufsichten und Schnitte zweier Vorrichtungen, die ich zur Freigabe der Kugeln benutzt habe. Die Buchstabenbezeichnung entsprechender Teile ist in den ersten sechs Bildern dieselbe.

Die in dem Fallkasten A freigegebenen Kugeln fielen durch das Fallrohr B auf die kreisende Scheibe K. Wenn ich Kugeln mittelst der in Bild VII dargestellten Vorrichtung freigab, so brachte ich eine Menge dieser Kugeln von mehreren Kubikzentimetern im Volumen in den Trog E, der einen Boden aus Stoff hatte und dicht schließend in einen Schlitz in dem Rahmen G hineinglitt. Ein Solenoid A zog das Stück B aus weichem Eisen ein und bewegte somit die Schlittenplatte C über das kurze offene Rohr H hin, das dicht unterhalb E an den Boden des Fallkastens angelötet war. Die Schlittenplatte trug eine biegsame Feder D mit einer Spitze, die über ein kleines Loch in der Mitte der Platte hinausragte. Die Bewegung von C wurde durch einen in der Zeichnung nicht sichtbaren Anschlag gehemmt, wenn D die Mitte des Bodens des Troges E erreichte, an dem D leicht schabte. Die durch dieses Schaben hervorgebrachte Schwingung veranlaßte,

[1]) John Zeleny and L. W. Mc Keehan, a. a. O.

daß einige Kugeln durch den Stoff hindurchgesiebt wurden, und diese fielen dann durch das kleine Loch in C, durch H und in das Fallrohr B hinein.

Bei dem in der Zeichnung VIII dargestellten Verfahren wurden die Kugeln auf dem Papier belassen, auf das sie sich nach dem Zerstäuben niedergeschlagen hatten. Ein Stück von diesem Papier wurde, mit der von den Kugeln besetzten Seite nach unten, bei F gerade über ein kleines Loch in dem Rahmen G gelegt, der dicht in das Rohr H paßte. Das Solenoid A zog mittelst des Stückes B einen Messingklotz C unter einem langen Metallstreifen D hinweg, der nach unten federte und dabei die Spitze E gegen die obere Fläche des Papiers, genau oberhalb des Loches in G, stieß. Dieser Stoß war nicht stark genug, um das Papier zu durchlöchern, aber er machte einige der Kugeln frei, und diese fielen dann durch H hindurch in das Fallrohr.

In dem Fallrohr B fielen die nach einem der beiden Verfahren freigegebenen Kugeln durch das innerste von vier konzentrischen Messingrohren, die dazu bestimmt waren, Luftströmungen zu verhindern. Die äußeren Rohre waren an einem Punkte durchlocht, wie es Bild III zeigt, um Druckänderungen in den Räumen zwischen den in der Nähe der Enden angebrachten hölzernen Ringen zu erleichtern. Die drei inneren Rohre wurden ganz und gar von diesen Ringen gehalten und standen mit keinem der übrigen Metallteile in Berührung. Der Apparat wurde in einem doppelwandigen und fensterlosen Zimmer benutzt, wodurch eine ausgezeichnet beständige Temperatur geschaffen wurde.

Das äußere Rohr war oben an den Fallkasten A und unten an die Bänder D, D und an die Messingplatte E angelötet. Diese Platte wurde von drei Nivellierschrauben J getragen (siehe Bild IV), von denen eine in einem Lager ruhte und die Neigung des Fallrohres gegen den äußeren Kasten L festlegte. Die Platte war von zwei Löchern durchsetzt, von denen das eine ein schmaler radialer Schlitz dicht unter dem Fallrohr war, das andere ein um 180° von dem Schlitz entferntes Fenster zur Beobachtung der Kugeln nach dem Falle. Eine Platte H (siehe Bild VI), die der Platte E ähnlich war, aber keinen Schlitz besaß, wurde an die Stelle von E gesetzt, wenn die Kugeln ausgemessen wurden. Hierdurch wurde mehr Raum für das Meßmikroskop geschaffen.

Die Fläche zur Aufnahme der Kugeln war die Oberfläche einer ebenen Glasscheibe K, die auf eine kreisförmige Messingplatte M aufgekittet war und unterhalb der Platte E auf einem Zapfen in dem Lager N kreiste. Auf einem Durchmesser der Platte M war ein Weicheisenstück O mit verstärkten Enden eingelassen. Die Pole dieses Stückes befanden sich unmittelbar über den Polen eines Elektromagnets P; dieser Elektromagnet wurde von einem hölzernen Rade Q getragen, das seinerseits mittelst eines Riemens Z von einem Chronographenmotor um N gedreht wurde. Der Strom wurde dem Elektromagnet P durch die Drähte S, S zugeführt, die in kreisförmige Quecksilbernäpfe in dem Ebonitblock T eintauchten. Infolge dieser Anordnung war die Unterlage der Platte K nirgends dem Atmosphärendruck ausgesetzt und bedurfte keiner Verpackung.

In dem Augenblick, wo die Kugeln freigegeben wurden, wurde das Rad Q durch Einrücken der Kuppelung mit dem Chronographenmotor in stetige Umdrehung versetzt, und die Kugeln wurden in dem Maße, wie sie nach und nach am Boden des Fallrohres ankamen, unter verschiedenen Winkeln auf der Oberfläche der Platte K aufgefangen. Eine mit einem Sekundenpendel in Reihe geschaltete Chronographenfeder ruhte auf einem Papierstreifen R, der an Q befestigt war, und verzeichnete bei der Drehung des Rades die einzelnen Sekunden. Diese Zeitaufzeichnung ist im Aufriß gleich rechts von T dargestellt und ebenso für eine andere Umlaufsgeschwindigkeit in Bild II. Nach Beendigung des Versuches, und nachdem der Umlauf von Q aufgehalten worden war, wurde ein über den Rand des Gehäuses L passender Zeiger V genau 180° von der Stelle entfernt angebracht, wo die Feder zuletzt ein Zeichen gemacht hatte. Wenn dieser Zeiger, während Q gedreht wurde, auf irgendeine Marke der Aufzeichnung seitens der Feder zeigte, so mußten die Kugeln, die gerade dann auf K gefallen waren, als dieses Zeichen gemacht wurde, 180° vom Boden des Fallrohres entfernt sein. Das heißt, sie mußten sich an einer Stelle befinden, die durch das Fenster bei F sichtbar ist. Durch Zählen der Sekunden vom Beginn der Federaufzeichnung bis zum Zeiger war die verstrichene Fallzeit unmittelbar gegeben.

Diese Zeit ist länger als die Zeit, die erforderlich sein würde, wenn die Kugel gleich von Anfang an mit ihrer Endgeschwindigkeit gefallen wäre, statt vom Ruhezustande auszugehen. Die hierfür anzubringende Korrektion läßt sich leicht finden. Die umstehende Tabelle gibt ihre Werte für den benutzten Apparat an.

Diese Korrektionen sind bei allen Fallzeiten von weniger als sieben Sekunden angebracht.

5. Halbmesser der Kugeln. Der Halbmesser der einzelnen Kugeln wurde in der Weise bestimmt, daß ihr Durchmesser zwei- bis acht-

Beobachtete Zeit in Sekunden	Korrektion in Sekunden
0,50	— 0,06
1,00	— 0,03
2,00	— 0,02
3,00	— 0,01
6,00	— 0,01
7,00	0

mal gemessen wurde, und zwar wurde die Mehrzahl der Kugeln sechsmal gemessen. Außer bei den Versuchen 1, 2 und 3 der Tabelle II und bei vierzehn Kugeln, die zu anderen Versuchen dienten und zu groß waren, um mit diesem Apparate gemessen zu werden, benutzte ich ein verbessertes Mikroskopobjektivmikrometer[1]). Die eben erwähnten Kugeln wurden mittelst eines Okularmikrometers gemessen. Das Gesichtsfeld des Mikroskops wurde mit diffusem Licht beleuchtet, das von dem Spiegel Y (siehe Bild IV in Fig. 3) durch das Fenster X und die Scheibe K reflektiert wurde. Kontrollmessungen mit verschiedenen Vergrößerungen lieferten für alle benutzten Größen übereinstimmende Ergebnisse, und es scheint, daß den Messungen der Halbmesser, selbst bei den kleinsten Kugeln, keine von der Beugung herrührenden konstanten Fehler anhaften, deren Betrag einen kleinen Bruchteil einer Lichtwellenlänge überschreitet. Einige Schwierigkeit ergab sich bei der Messung der kleineren Kugeln aus den Erschütterungen des Pfeilers, auf dem der Apparat stand. Diese Störung wurde dadurch umgangen, daß die Durchmesser nach Mitternacht gemessen wurden, wenn der lebhafte Verkehr auf der Straße aufgehört hatte. Es erwies sich als das bequemste Verfahren zur schnellen Messung, das Fadenkreuz von außen mit dem kreisförmigen Bilde einer Kugel zur Berührung zu bringen. Deshalb mußte bei allen gemessenen Durchmessern eine Korrektion für die Breite des Fadenkreuzes angebracht werden. Der Betrag dieser Korrektion wurde dadurch bestimmt, daß andere Berührungsarten mit anderen Objekten als Kugeln zum Vergleich herangezogen wurden.

6. Druck. Der Druck im Innern des Gehäuses L, das aus ungefähr 5 mm starkem Messing bestand, wurde mittelst einer Wasserstrahlpumpe oder einer Gaedepumpe — je nach der gewünschten Verminderung — verringert. Die Pumpen wurden bei U (Fig. 3) angesetzt. Das Fenster X bestand aus einer Glasplatte in einer Paraffinfassung, die einen dauernd luftdichten Schluß lieferte. Der Deckel des Gehäuses L war mit Schmirgel so abgeschliffen, daß er genau auf das Unterteil paßte, und ein dünner Überzug von Vakuumkitt zwischen den Flächen ergab eine ausgezeichnete Dichtung. Ein Platindraht für die elektrische Zuleitung zu dem Solenoid im Fallkasten war in das gläserne Manometerrohr auf der Außenseite des Gehäuses eingeschmolzen, während die Rückleitung durch die Metallteile des Apparates und seine Stützen W, W erfolgte.

Die Druckablesungen wurden mittelst eines Kathetometers an einem geschlossenen Quecksilbermanometer vorgenommen, und wenn der Druck genügend klein war, wurde er auch mittelst eines Mc-Leod-Manometers mit kleinem Faktor gemessen. Glashähne dienten dazu, den Apparat gegen die Pumpen abzuschließen. Vor der Freigabe der Kugeln wurde der Apparat mindestens drei Stunden lang sich selbst überlassen, so daß der Druck und die Temperatur in allen seinen Teilen stetig waren. Ein Napf mit P_2O_5 wurde in den Apparat hineingestellt, ehe der Druck verringert wurde. Das Trockenmittel erachtete ich für notwendig, obgleich Versuche bei Atmosphärendruck zeigten, daß der durch eine kleine Menge Wasserdampf hervorgerufene Unterschied in der inneren Reibung nicht merklich war. Bei niedrigen Drucken könnte dieselbe Dampfmenge, da sie einen größeren Bruchteil des gesamten Gases ausmacht, die innere Reibung beträchtlich verändern; ist doch die innere Reibung des Dampfes viel geringer als die der Luft.

7. Verfahren zur Auffindung und Messung der Kugeln. Um die Kugeln aufzusuchen und auszumessen, wurde das Mikroskop auf einen Schlitten gesetzt, der ihm nun eine Bewegung längs eines Halbmessers der Platte K gestattete, der 180° von dem unter dem Fallrohr verlaufenden entfernt war. Der Abstand vom Mittelpunkte der Platte wurde durch eine Feinverstellungsschraube reguliert. Nachdem das Mikroskop auf die Oberfläche von K eingestellt worden war, wurden das Rad Q und die Platte K ganz langsam mittelst passender Übersetzung von Hand gedreht und die Kugeln, so wie sie aufgefunden wurden, gemessen. Die einzelnen Kugeln wurden durch Bewegen der Platte oder des Mikroskops in die Nähe der Gesichtsfeldmitte gebracht, und der Strom für den Magnet P wurde während der Messungen unterbrochen, um ein Kriechen der Platte K zu verhindern. Nachdem ein Streifen oder ein Gebiet ganz durchgesehen worden war, wurde das Mikroskop in radialer Richtung um die Breite des Gesichtsfeldes verschoben, und das Verfahren wurde so lange wiederholt, bis genügend Kugeln ausgemessen worden waren, um die Änderung der Fallzeit mit dem Halbmesser zu

1) John Zeleny and L. W. Mc Keehan, Phys. Rev. **32**, 530, 1911.

zeigen, oder bis keine Kugeln mehr zu finden waren. Die Halbmesser wurden für einen Versuch erst dann aus den Ablesungen am Mikrometer ermittelt, wenn sie sämtlich ausgemessen worden waren. Die Gesamtzahl der auf die Platte fallenden Kugeln war bei keinem Versuch größer als dreihundert, so daß keinerlei Beeinflussung der Geschwindigkeit infolge einer Wechselwirkung zwischen den Kugeln stattfand[1]).

§ 4. Versuchsergebnisse.

In den Tabellen und Kurven I bis XVI sind die Versuchsergebnisse, nach abnehmendem Drucke geordnet, enthalten. Die verzeichneten und aufgetragenen Größen sind die Halbmesser in cm 10^{-4} und die reziproken Werte der Endgeschwindigkeiten, das heißt die bei diesen Geschwindigkeiten zum Durchfallen einer Strecke von einem Zentimeter erforderlichen Zeiten in Sekunden. In den Kurven sind die Halbmesser Ordinaten und die Zeiten Abszissen. Für jede gemessene Kugel ist ein kleiner Kreis eingezeichnet.

Das in Fig. 3, Bild VIII dargestellte Verfahren zur Freigabe erwies sich als das befriedigendste von etwa sieben Verfahren, und zwar vermutlich deshalb, weil das benutzte Papier das obere Ende des Fallrohres während des ganzen Versuches verschloß, und somit keinerlei durch die Bewegung von Teilen des Mechanismus im Fallkasten erregte Luftströmungen die Luft im Rohre stören konnten. Große Kugeln hafteten jedoch nicht an dem Papier und ließen sich nach diesem Verfahren nicht erhalten.

Die nach diesem Verfahren bei Atmosphärendruck gewonnenen Ergebnisse sind in Tabelle I und Kurve I wiedergegeben, mit der Ausnahme, daß die Kugeln, bei denen der Halbmesser größer ist als 0,0013 cm, nach dem in Fig. 3, Bild VII dargestellten Verfahren erhalten worden waren. Die Ergebnisse, die bei Atmosphärendruck mit anderen Freigabeverfahren als dem in Fig. 3, Bild VIII dargestellten gewonnen wurden, sind in Tabelle II und Kurve II enthalten. In keiner dieser Tabellen finden sich irgendwelche Kugeln, die in das erste Zwanzigstel der vollständigen Umlaufsperiode der Platte K fielen. Die größten Kugeln stammen von Versuchen, bei denen die Umlaufszeit 20 Sekunden betrug, die kleineren von Versuchen, bei denen die Umlaufszeit 200—1200 Sekunden betrug. Der Fehler bei den Zeitmessungen ist somit in dem ganzen Bereich klein gehalten worden.

Das Bereich der bei sämtlichen Versuchen benutzten Größen erstreckte sich von $a = 0{,}0025$ cm bis $a = 0{,}00012$ cm, und das Bereich der Drucke von Atmosphärendruck (740 mm) bis hinab zu 0,32 mm Hg. Die gesamte Fallzeit für die verschiedenen Größen und Drucke bewegte sich von 0,74 Sek. bis zu 1072 Sek.

Der Wert der Konstanten B in der Formel wurde für jede einzelne Kugel bei den Versuchen der Tabellen VI, X, XIII und XV, also bei Drucken von 8,28 mm, 2,11 mm, 0,69 mm und 0,34 mm Hg ermittelt, die Mittelwerte von B für die vier Versuche waren 0,00724, 0,00724, 0,00826 und 0,00729; das ergibt einen Hauptmittelwert

$$B = 0{,}0075 \pm 2,$$

entsprechend einem Werte

$$A = 1{,}00 \pm 3.$$

Die enge Übereinstimmung zwischen dem ersten, zweiten und vierten Werte ist eine zufällige; das sieht man, wenn man die wahrscheinlichen Fehler bei den Versuchen betrachtet. Die wahrscheinlichen Fehler bei der Fallzeit sind für die größten Kugeln groß, und die wahrscheinlichen Fehler bei den Halbmessern betragen für die kleinsten Kugeln mehrere Prozent. Der wahrscheinliche Fehler des Mittelwertes von B bei einem Versuche hängt ab von dem wahrscheinlichen Fehler des Druckes, da dieser bei der Mittelbildung nicht reduziert wird. Die Fehler beim Druck sind bei diesen vier Versuchen verschieden, weil beim ersten und zweiten Versuch das Quecksilbermanometer, beim dritten und vierten das Mc-Leod-Manometer benutzt wurde. Legt man diesen vier Werten Gewichte bei, die diesen wahrscheinlichen Fehlern entsprechen, so findet man den Mittelwert etwas höher als den oben angegebenen unbewerteten. Diese Drucke wurden zur Ermittelung von B deshalb gewählt, weil die Abweichung der Fallzeit von der bei Atmosphärendruck gefundenen groß ist, und trotzdem die gesamte Fallzeit nicht zu klein für eine genaue Messung ist, wie es bei noch niedrigeren Drucken der Fall sein würde.

Werte für die auf ein Zentimeter entfallende Zeit wurden unter Zugrundelegung des Wertes von A berechnet, welcher der Annahme eines normalen Austrittes der auftreffenden Moleküle entspricht, also des Wertes $A = 1{,}05$, und zwar für jeden benutzten Druck und für umstehende Werte des Halbmessers (s. Tabelle).

Diese Zeiten sind in den Kurven I und III bis XVI als kleine Kreuze eingetragen, und wie ersichtlich werden wird, fallen die Kreise, welche beobachtete Kugeln darstellen, gut mit einer durch diese Kreuze hindurchgehenden Linie zusammen.

1) E. Cunningham, a. a. O.

0,004	cm	0,0005	cm
0,0035	„	0,0004	„
0,003	„	0,0003	„
0,0025	„	0,00025	„
0,002	„	0,0002	„
0,0017	„	0,00018	„
0,0014	„	0,00015	„
0,0012	„	0,00014	„
0,001	„	0,00013	„
0,0008	„	0,00012	„
0,0006	„		

Einen Begriff von dem großen Betrage der Änderung der Fallzeit wird man erhalten, wenn man die Kurve I (Fig. 5) betrachtet. Der schwarze Punkt dicht am linken Rande der Figur stellt die Zeit dar, die eine Kugel von 0,00014 cm Halbmesser bei einem Drucke von 0,32 mm Hg braucht, um ein Zentimeter zu durchfallen. Bei Atmosphärendruck würde diese Kugel in einer Zeit fallen, welche durch das letzte Kreuz zur Rechten der Figur angedeutet ist. Der Wert des Gliedes $\frac{B}{ap}$ in der Formel bewegt sich von 0,003 für $a = 0{,}004$ cm und $p = 740$ mm bis zu 196 für $a = 0{,}00012$ cm und $p = 0{,}32$ mm. Die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der Formel ist in dem ganzen Bereich ausgezeichnet.

Welche Unterschiede man erhält, wenn man die Geschwindigkeiten unter Zugrundelegung des einen oder des anderen Wertes von A berechnet, kann man aus der Betrachtung der Fig. 4 ersehen. In dieser Figur sind drei Kurven gezeichnet; diese zeigen die Änderung der Zeit, die zum Durchfallen eines Zentimeters erforderlich ist (also der Abszisse) mit der Änderung des in cm. 10^{-4} dargestellten Halbmessers (der Ordinate) bei einem Druck von 0,32 mm Hg und einer Temperatur von 20° C. Die Kurve zur Linken und die mit dieser durch horizontale Linien verbundene Kurve sind für $A = 1{,}5$ bzw. $A = 1{,}2$

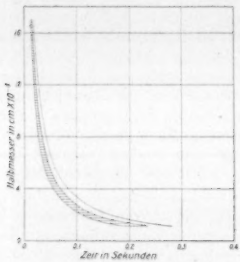


Fig. 4.

gezeichnet und entsprechen den nach den Cunninghamschen Voraussetzungen möglichen Grenzwerten. Die Kurve zur Rechten ist für $A = 1{,}05$ gezeichnet, also für den Wert, welcher der Annahme eines normalen Austrittes der auftreffenden Moleküle entspricht. Die Kurve XVI, welche die Versuchsergebnisse bei diesem Drucke zeigt, stimmt fast genau mit dieser letztgenannten Kurve überein.

Bei Atmosphärendruck sind die Unterschiede in dem erhaltenen Größenbereich mit der benutzten Methode nicht nachweisbar. Eine Vergleichung der Kurven I und II wird dies dartun. Die Kreuze in Kurve II stellen Zeiten dar, die unter der Annahme $A = 0$ (Stokessche Formel) berechnet sind, die Kreuze in Kurve I stellen Zeiten dar, die unter der Annahme $A = 1{,}05$ berechnet sind. Der Unterschied beläuft sich für die Zeit auf 7 v. H. für die kleinste dargestellte Kugel und ist für alle größeren Kugeln größer, und der weitere Unterschied, der sich für den Fall $A = 1{,}5$ ergeben würde, würde — wiederum für die kleinste dargestellte Kugel — ungefähr 3 v. H. ausmachen. Ein Fehler von 1,5 v. H. bei der Ausmessung des Halbmessers einer Kugel würde diesen weiteren Unterschied in der Fallzeit gänzlich verschleiern.

Den einzigen sonstigen Versuchsfehler bei der Konstanten der Cunninghamschen Formel hat Herr Professor R. A. Millikan[1]) angegeben, der A zu 0,815 fand. Dieser Wert ist aus Versuchen an Kugeln von verschiedener Größe bestimmt worden, die aber alle bei einem und demselben Drucke fielen, nämlich bei Atmosphärendruck. Die Methode ist insofern eine indirekte, als die Halbmesser der Kugeln nicht ausgemessen, sondern aus ihrer Fallzeit unter der Annahme einer für sämtliche Kugeln gleichmäßigen elektrischen Ladung berechnet wurden. Das benutzte Material war eine Flüssigkeit, und innere Wirbel in den Tropfen geben möglicherweise Anlaß zu einem Energieverbrauch und erniedrigen infolgedessen den scheinbaren Wert von A.

Tabelle I.

Versuch 1.

p 736 mm. Temperatur 20,6° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 20 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,002293	0,1929	0,001382	0,437
0,002170	0,1995	0,001369	0,481
0,001846	0,2404	0,001326	0,474
0,001746	0,297	0,001308	0,518
0,001461	0,419		

1) Science **32**, 446, 1911.

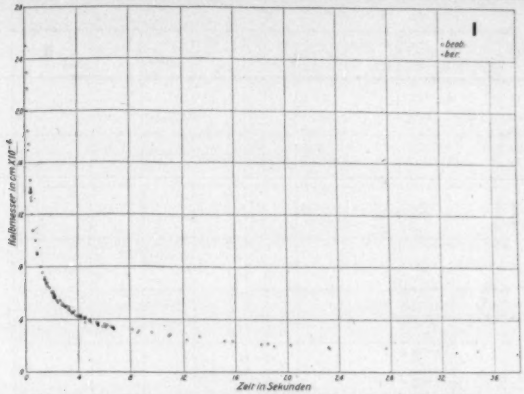


Fig. 5.

Versuch 2.

p 749 mm. Temperatur 18,3° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 226 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001369	0,379	0,000453	3,65
0,001077	0,600	0,000449	3,59
0,000906	0,934	0,000433	4,10
0,000898	0,934	0,000432	3,86
0,000757	1,365	0,000427	4,18
0,000719	1,524	0,000426	3,96
0,000696	1,566	0,000417	4,18
0,000679	1,718	0,000416	4,56
0,000674	1,653	0,000407	4,51
0,000653	1,748	0,000393	4,86
0,000637	1,916	0,000385	4,97
0,000608	2,169	0,000385	5,40
0,000604	2,088	0,000382	4,52
0,000585	2,270	0,000373	5,45
0,000580	2,189	0,000368	5,49
0,000560	2,296	0,000355	5,52
0,000541	2,45	0,000350	5,88
0,000541	2,70	0,000346	6,10
0,000522	2,56	0,000346	6,67
0,000505	2,86	0,000339	6,63
0,000492	3,36	0,000335	6,72
0,000466	3,47	0,000334	6,79
0,000461	3,75		

Versuch 3.

p 740 mm. Temperatur 19,7° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 1080 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,000704	1,492	0,000317	8,69
0,000571	2,335	0,000303	9,63
0,000562	2,205	0,000287	11,03
0,000518	2,854	0,000274	10,86
0,000502	2,984	0,000273	13,26
0,000490	3,081	0,000238	15,18
0,000473	3,31	0,000238	15,79
0,000413	4,44	0,000218	18,49
0,000378	5,52	0,000213	17,96
0,000370	6,03	0,000210	20,24
0,000361	6,26	0,000192	23,22
0,000351	6,52	0,000191	27,64
0,000327	8,17	0,000162	34,76

Tabelle II.

Versuch 1.

p 753 mm. Temperatur 19,7° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 217 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001536	0,325	0,000676	1,722
0,001482	0,351	0,000649	1,979
0,001441	0,325	0,000644	1,992
0,001440	0,358	0,000632	1,800
0,001410	0,358	0,000552	2,405
0,001397	0,387	0,000465	3,670
0,001365	0,410	0,000462	3,718
0,001268	0,462	0,000441	3,847
0,001113	0,455	0,000430	3,784
0,000825	1,433	0,000417	4,65
0,000707	1,378	0,000323	7,04

Versuch 2.

p 735 mm. Temperatur 20,1° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 230 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001423	0,390	0,000522	2,619
0,001277	0,507	0,000471	3,096
0,001276	0,471	0,000393	4,10
0,001166	0,494	0,000386	4,40
0,001029	0,686	0,000344	5,11
0,000840	1,011	0,000342	5,70
0,000723	1,485	0,000340	5,92
0,000617	1,914	0,000324	5,14
0,000563	2,135	0,000323	7,19

Versuch 3.

p 740 mm. Temperatur 20,6° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 54 Sek.

a	$1/V$
0,001191	0,520
0,001149	0,397
0,000664	1,732

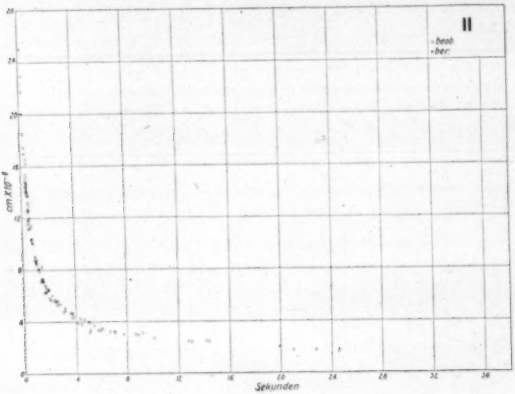


Fig. 6.

Versuch 4

ist derselbe wie Versuch 1 in Tabelle I.

Versuch 5.

p 734 mm. Temperatur 21,0° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 894 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,000575	2,046	0,000307	8,64
0,000563	2,404	0,000306	7,76
0,000556	2,631	0,000279	10,07
0,000547	2,566	0,000254	14,13
0,000486	3,23	0,000250	14,39
0,000423	4,32	0,000247	13,02
0,000374	5,39	0,000180	20,99
0,000327	6,66	0,000179	22,74
0,000318	9,23	0,000164	24,56

Versuch 6.

p 740 mm. Temperatur 20,7° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 191 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001657	0,344	0,000853	1,017
0,001623	0,370	0,000535	2,83
0,001510	0,370	0,000396	5,13
0,001144	0,659	0,000352	6,06
0,001127	0,637		

Versuch 7.

p 740 mm. Temperatur 20,7° C. Rohrlänge 31,1 cm. Größte meßbare Fallzeit 197 Sek.

a	$1/V$
0,001473	0,342
0,001117	0,571
0,001035	0,726
0,000789	1,221

Versuch 8.

p 742 mm. Temperatur 19,4° C. Rohrlänge 31,4 cm. Größte meßbare Fallzeit 237 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001243	0,441	0,000807	1,198
0,001185	0,460	0,000733	1,500
0,001003	0,758	0,000726	1,429
0,000903	0,988	0,000710	1,506
0,000874	1,097	0,000709	1,547
0,000873	0,972	0,000625	1,739
0,000863	0,988		

Tabelle III.

Versuch 1.

p 100,4 mm. Temperatur 21,0° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 212 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,002660	0,1462	0,000793	1,011
0,002177	0,2046	0,000712	1,436
0,002069	0,2795	0,000641	1,781
0,001918	0,296	0,000543	2,64
0,001854	0,221	0,000537	2,38
0,001840	0,260	0,000529	2,52
0,001531	0,318	0,000497	2,95
0,001293	0,482	0,000497	3,25
0,001207	0,497	0,000440	3,49
0,001176	0,520	0,000438	3,87
0,001068	0,695	0,000320	6,76
0,000992	0,754	0,000313	6,60
0,000833	1,170	0,000302	6,88

Versuch 2.

p 100,6 mm. Temperatur 20,6° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 17 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,002981	0,0842	0,001623	0,307
0,002063	0,1929	0,001289	0,409
0,001732	0,276	0,001145	0,556
0,001648	0,300		

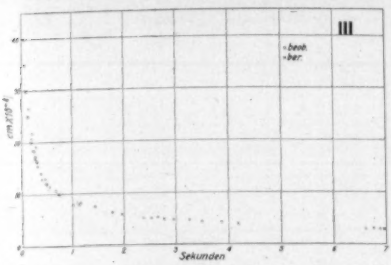


Fig. 7.

Tabelle IV.

Versuch 1.

p 33,64 mm. Temperatur 21,3° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 80 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,002479	0,1137	0,000898	0,900
0,002380	0,1137	0,000850	1,075
0,001933	0,1884	0,000763	1,112
0,001792	0,2113	0,000756	1,254
0,001545	0,3217	0,000716	1,364
0,001458	0,354	0,000639	1,803
0,001240	0,539	0,000488	2,294
0,000910	0,844		

Versuch 2.

p 34,85 mm. Temperatur 21,2° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 186 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,003715	0,0715	0,000808	1,027
0,002989	0,1040	0,000807	1,053
0,002642	0,1040	0,000737	1,170
0,002591	0,1234	0,000635	1,527
0,001506	0,351	0,000634	1,501
0,001347	0,429	0,000623	1,689
0,001199	0,487	0,000532	2,053
0,001109	0,604	0,000516	2,339
0,001095	0,617	0,000487	2,385
0,001013	0,676	0,000460	2,781
0,000975	0,669	0,000380	4,14
0,000926	0,767	0,000331	5,10
0,000909	0,786	0,000330	4,71
0,000908	0,812		

Versuch 3.

p 33,30 mm. Temperatur 20,5° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 18 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,003544	0,0874	0,001603	0,291
0,003291	0,0971	0,001216	0,539
0,002442	0,1312	0,001175	0,565

Versuch 4.

p 34,77 mm. Temperatur 22,1° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 886 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,000666	1,299	0,000439	2,44
0,000597	1,462	0,000428	2,79
0,000588	1,364	0,000419	2,83
0,000545	1,721	0,000408	2,60
0,000521	1,656	0,000395	2,99
0,000515	1,754	0,000344	4,16
0,000460	2,83	0,000299	5,17
0,000458	2,21	0,000296	5,72

Versuch 5.

p 33,58 mm. Temperatur 20,9° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 20 Sek.

a	$1/V$
0,001749	0,268
0,001531	0,314
0,001413	0,350
0,001154	0,538
0,000989	0,648

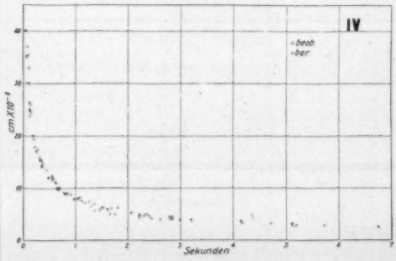


Fig. 8.

Tabelle V.

p 8,55 mm. Temperatur 20,5° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 177 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,000865	0,574	0,000234	3,32
0,000444	1,488	0,000152	4,80
0,000424	1,527	0,000121	5,33
0,000307	2,45		

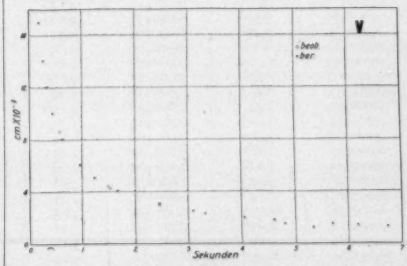


Fig. 9.

Tabelle VI.

p 8,28 mm. Temperatur 21,3° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 172 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001769	0,1427	0,000399	1,686
0,001411	0,1978	0,000343	1,861
0,001216	0,292	0,000316	2,250
0,001141	0,353	0,000303	2,445
0,000819	0,584	0,000287	2,57
0,000766	0,652	0,000263	2,86
0,000752	0,712	0,000257	2,94
0,000599	0,960	0,000220	3,67
0,000569	1,067	0,000219	3,71
0,000518	1,183	0,000204	4,10
0,000517	1,118	0,000175	4,64
0,000477	1,287	0,000175	5,18
0,000430	1,472	0,000169	4,79
0,000429	1,517	0,000116	5,54

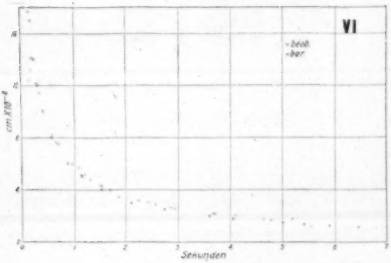


Fig. 10.

Tabelle VII.

p 8,14 mm. Temperatur 21,5° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 176 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,000961	0,506	0,000271	2,624
0,000934	0,499	0,000264	2,77
0,000812	0,606	0,000260	2,85
0,000733	0,710	0,000256	2,87
0,000602	0,886	0,000255	3,02
0,000571	0,953	0,000253	2,96
0,000474	1,271	0,000232	3,16
0,000438	1,427	0,000223	3,35
0,000428	1,404	0,000202	3,84
0,000393	1,686	0,000197	4,05
0,000344	1,916	0,000182	4,26
0,000328	2,098	0,000170	4,68
0,000323	2,146	0,000167	4,84
0,000318	2,053	0,000162	5,03
0,000318	2,098	0,000159	5,15
0,000315	2,186	0,000157	5,18
0,000294	2,455	0,000151	5,14
0,000287	2,494	0,000146	5,74

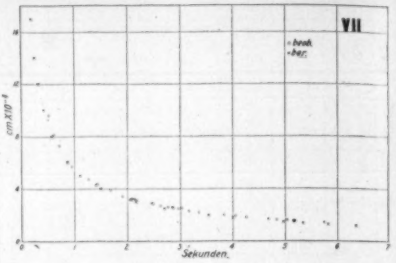


Fig. 11.

Tabelle VIII.

Versuch 1.

p 7,70 mm. Temperatur 20,9° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 184 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,002090	0,1787	0,000555	0,965
0,002038	0,1787	0,000525	1,104
0,001375	0,276	0,000514	1,072
0,001126	0,370	0,000510	1,153
0,001065	0,491	0,000507	1,004
0,001059	0,445	0,000494	1,134
0,001044	0,406	0,000466	1,495
0,000922	0,478	0,000382	1,589
0,000916	0,500	0,000327	1,949
0,000873	0,533	0,000316	1,888
0,000784	0,630	0,000307	2,066
0,000764	0,650	0,000306	2,129
0,000704	0,689	0,000274	2,556
0,000701	0,712	0,000257	2,550
0,000688	0,731	0,000210	3,17
0,000621	0,896	0,000179	3,12

Versuch 2.

p 7,72 mm. Temperatur 20,8° C.
Rohrlänge 30,9 cm.
Größte meßbare Fallzeit 20 Sek.

a	$1/V$
0,001504	0,240
0,001195	0,338
0,000934	0,474
0,000857	0,556

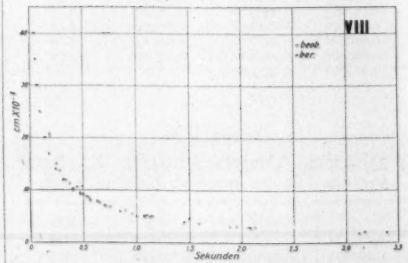


Fig. 12.

Tabelle IX.

Versuch 1.

p 3,10 mm. Temperatur 20,0° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 20 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001534	0,1588	0,000797	0,305
0,001303	0,1946	0,000753	0,304
0,001301	0,1751	0,000734	0,383
0,000981	0,237	0,000707	0,351
0,000917	0,270	0,000671	0,390
0,000883	0,270		

Versuch 2.

p 3,14 mm. Temperatur 20,2° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 20 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,002042	0,0809	0,000930	0,2275
0,002027	0,0923	0,000892	0,2616
0,002007	0,0939	0,000890	0,289
0,001966	0,1134	0,000709	0,341
0,001790	0,1150	0,000699	0,390
0,001775	0,1118	0,000687	0,419
0,001372	0,1556	0,000658	0,401
0,001365	0,1540	0,000609	0,418
0,001327	0,1703	0,000565	0,460
0,001268	0,1832	0,000538	0,487
0,001240	0,1914	0,000502	0,496
0,001145	0,1654	0,000456	0,565
0,001106	0,2012	0,000321	0,625
0,001038	0,2109		

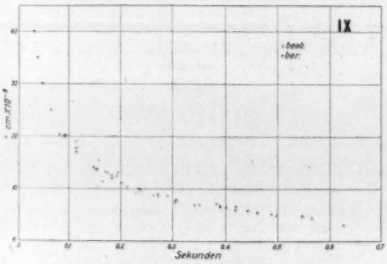


Fig. 13.

Tabelle X.

p 2,11 mm. Temperatur 21,3° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 149 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001168	0,1167	0,000400	0,525
0,001145	0,1264	0,000369	0,587
0,001095	0,1783	0,000321	0,684
0,000831	0,2076	0,000308	0,720
0,000805	0,2205	0,000269	0,817
0,000777	0,2594	0,000261	0,904
0,000711	0,2756	0,000240	0,992
0,000590	0,341	0,000226	1,099
0,000544	0,360	0,000177	1,439
0,000516	0,376	0,000176	1,446
0,000499	0,409	0,000135	1,702
0,000425	0,435	0,000132	2,082
0,000423	0,470		

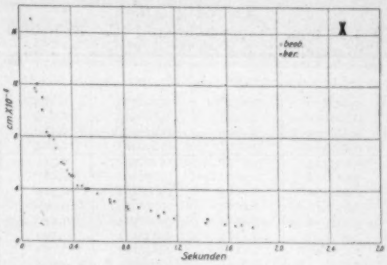


Fig. 14.

Tabelle XI.

Versuch 1.

p 2,01 mm. Temperatur 20,6° C. Rohrlänge 30,9 cm.

Größte meßbare Fallzeit 20 Sek.

a	$1/V$
0,002396	0,0341
0,002358	0,0387

Versuch 2.

p 2,01 mm. Temperatur 20,5° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 19 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001357	0,1208	0,000670	0,2596
0,001213	0,1622	0,000626	0,275
0,000940	0,1888	0,000624	0,304
0,000931	0,1969	0,000569	0,317
0,000768	0,2278	0,000515	0,322
0,000764	0,2274	0,000510	0,345

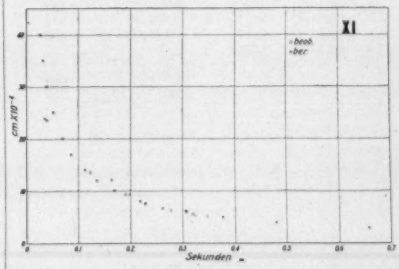


Fig. 15.

Tabelle XII.

p 1,28 mm. Temperatur 20,7° C. Rohrlänge 30,9 cm. Größte meßbare Fallzeit 18 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,002222	0,0426	0,000554	0,2034
0,001616	0,0647	0,000512	0,259
0,001533	0,0672	0,000408	0,280
0,001422	0,0738	0,000401	0,324
0,001323	0,0838	0,000394	0,321
0,001320	0,0844	0,000391	0,287
0,001164	0,0893	0,000364	0,311
0,001049	0,1082	0,000340	0,348
0,001033	0,0910	0,000304	0,340
0,000883	0,1248	0,000294	0,399
0,000808	0,1270	0,000293	0,420
0,000752	0,1494	0,000281	0,392
0,000623	0,1595	0,000245	0,457
0,000588	0,1914	0,000233	0,548

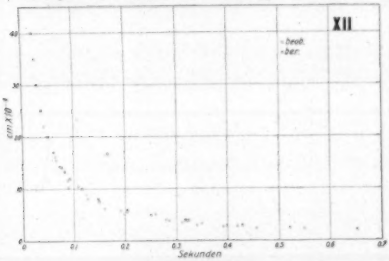


Fig. 16.

Tabelle XIII.

p 0,69 mm. Temperatur 21,8° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 22 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001380	0,0405	0,000349	0,1942
0,001361	0,0435	0,000319	0,2062
0,000964	0,0674	0,000309	0,2254
0,000793	0,0830	0,000284	0,237
0,000678	0,1141	0,000257	0,263
0,000632	0,0970	0,000239	0,282
0,000589	0,1083	0,000222	0,313
0,000507	0,1196	0,000207	0,347
0,000463	0,1472	0,000204	0,343
0,000414	0,1537	0,000158	0,448
0,000401	0,1595	0,000133	0,430
0,000396	0,1579	0,000125	0,477
0,000391	0,1628	0,000115	0,482
0,000385	0,1754		

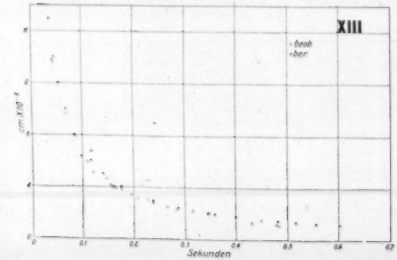


Fig. 17.

Tabelle XIV.

p 0,40 mm. Temperatur 21,1° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 16 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,000975	0,0493	0,000259	0,1670
0,000791	0,0551	0,000256	0,1680
0,000654	0,0662	0,000256	0,1718
0,000639	0,0688	0,000243	0,1721
0,000595	0,0759	0,000241	0,1932
0,000556	0,0850	0,000228	0,1848
0,000474	0,0856	0,000221	0,2056
0,000429	0,0921	0,000219	0,1987
0,000384	0,1157	0,000219	0,2033
0,000367	0,1180	0,000211	0,227
0,000351	0,1232	0,000200	0,242
0,000351	0,1252	0,000188	0,265
0,000344	0,1274	0,000186	0,258
0,000323	0,1268	0,000162	0 280
0,000320	0,1271	0,000156	0,316
0,000305	0,1378	0,000139	0,363
0,000261	0,1579	0,000133	0,355

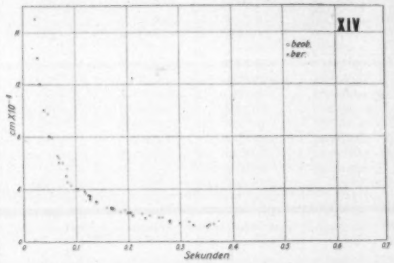


Fig. 18.

Tabelle XV.

p 0,34 mm. Temperatur 21,3° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 16 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001501	0,0240	0,000340	0,1161
0,000898	0,0379	0,000332	0,1154
0,000736	0,0412	0,000319	0,1148
0,000684	0,0454	0,000271	0,1540
0,000624	0,0538	0,000226	0,1987
0,000556	0,0700	0,000213	0,1922
0,000425	0,0788	0,000200	0,1974
0,000401	0,0885	0,000173	0,2376
0,000386	0,0862	0,000119	0,306
0,000383	0,0898		

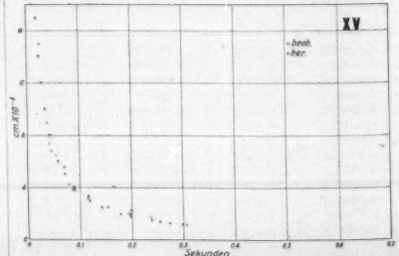


Fig. 19.

Tabelle XVI.

p 0,32 mm. Temperatur 21,3° C. Rohrlänge 30,96 cm. Größte meßbare Fallzeit 17 Sek.

a	$1/V$	a	$1/V$
0,001163	0,0341	0,000273	0,1167
0,000730	0,0379	0,000263	0,1161
0,000647	0,0405	0,000253	0,1346
0,000548	0,0564	0,000244	0,1524
0,000501	0,0638	0,000242	0,1417
0,000494	0,0668	0,000239	0,1333
0,000468	0,0752	0,000239	0,1472
0,000415	0,0788	0,000216	0,1598
0,000381	0,0798	0,000202	0,1816
0,000379	0,0814	0,000190	0,1871
0,000357	0,0914	0,000178	0,1968
0,000349	0,0992	0,000172	0,2024
0,000347	0,0973	0,000163	0,1961
0,000340	0,1028	0,000142	0,228
0,000327	0,1031	0,000127	0,266
0,000289	0,1177		

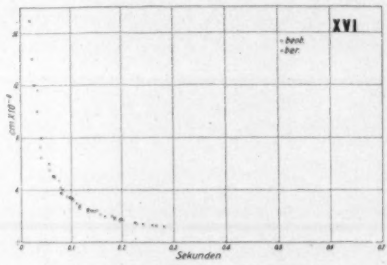


Fig. 20.

§ 5. Sporen.

Es fand sich, daß bei Sporen von Lykopodium, die bei Atmosphärendruck nur etwa halb so schnell fielen, wie es die Stokessche Formel verlangte, bei niedrigeren Drucken dasselbe Verhältnis zwischen der beobachteten Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit bestehen bleibt, die sich aus der Formel berechnet, welche für Wachskugeln bei allen Drucken gültig blieb. Das bedeutet, daß die Dichte, welche die einzige gemessene Größe ist, die in der Formel in der ersten Potenz vorkommt, sehr ungenau war. Die Dichte, wie sie durch verfeinerte volumenometrische Messungen bestimmt wurde, betrug 1,175. Das mag die Dichte einer festen Schale gewesen sein, die einen Luftraum umhüllte, oder die Dichte einer schwammigen Masse, die viele Lufträume enthielt. Die durchschnittliche Dichte, wenn wir darunter den Quotienten aus der Masse einer Spore und dem Volumen einer Kugel von ihrem mittleren Halbmesser verstehen, diese durchschnittliche Dichte würde ungefähr 0,6 betragen müssen, damit die Spore sich so verhält, wie sie es tatsächlich tut. Jedenfalls kann man eine turbulente Bewegung der Luft nicht länger für die bei Atmosphärendruck beobachteten Abweichungen verantwortlich machen. Versuche mit den übrigen früher benutzten Sporen habe ich nicht unternommen, weil der Zustand des Materiales sich mit der Zeit verändert zu haben schien.

§ 6. Zusammenfassung und Schluß.

Die Formel $V = \frac{2}{9} \frac{g a^2 (\sigma - \varrho)}{\mu} \left(1 + A \frac{l}{a}\right)$, in welcher A eine Konstante ist, gibt die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner fester Kugeln in Luft über ein weites Halbmesser- und Druckbereich wieder. Die Konstante A, die in dieser Formel erscheint, hat, wie sich herausstellt, einen theoretischen Wert, der von der mit der kinetischen Gastheorie vereinbaren Annahme abhängig ist, die man über die Art und Weise des Aufschlagens der Gasmoleküle auf die Oberfläche der Kugel macht. Nimmt man elastische Zusammenstöße an, so ist der Wert von A 1,5; nimmt man unelastische Zusammenstöße und dieselbe Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten bei den austretenden Molekülen an wie bei den einfallenden, so ist der Wert von A 1,2, unter der Annahme unelastischer Zusammenstöße und normalen Austrittes aller auftreffenden Moleküle ist der Wert von A 1,05; nach den Versuchsergebnissen ist der Wert von A $1{,}00 + 3$.

Die enge Übereinstimmung der Versuchsergebnisse mit der unter der Annahme normalen Austrittes abgeleiteten Formel macht es wahrscheinlich, daß ein auf einen festen Körper auftreffendes Gasmolekül in die Molekülschicht an der Oberfläche verstrickt wird und nach einer Anzahl von Zusammenstößen mit diesen Molekülen wieder austritt, wobei seine Austrittsrichtung im allgemeinen nahezu senkrecht zur Oberfläche ist. Die Versuchsergebnisse lassen nicht erkennen, ob diese durchdringliche Schicht aus Molekülen von derselben Art wie die übrigen des festen Körpers zusammengesetzt ist, oder ob es eine verdichtete Gasschicht ist; sie lehren vielmehr nur, daß die Abstände zwischen den Molekülen in dieser Schicht im Vergleich zu den Abständen in einem Gase unter normalen Druck- und Temperaturverhältnissen klein sind.

Ich benutze gern die Gelegenheit, Herrn Professor John Zeleny für sein dauerndes Interesse an dem Fortgange dieser Arbeit und für seine vielen wertvollen Ratschläge für die Lösung der experimentellen und theoretischen Schwierigkeiten zu danken.

Physikalisches Laboratorium der Universität von Minnesota, den 17. Mai 1911.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 19. Juni 1911.)

Über eine Methode zur Untersuchung von Absorptionslinien mit dem Stufengitter und über die Veränderung von Absorptionslinien durch fremde Gase.

(Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Salzburg 1909.)

Von Chr. Füchtbauer.

Nach der elementaren Theorie ist eine Spektrallinie, bei gegebener Schwingungszahl und gegebener Größe von $\frac{e}{m}$ und e, noch charakterisiert durch die Zahl der schwingungsfähigen Teilchen in der Volumeinheit und durch die Dämpfung. Das experimentelle Maß für die Dämpfung ist bei einer Absorptionslinie z. B. der Abstand der beiden Punkte, an denen die Absorption auf die Hälfte herabsinkt, von der Stelle größter Absorption. (Als roheres Maß der Dämpfung kann statt dieses „Halbwertsintervalls" einfach die Breite der Linie dienen.) Die Teilchenzahl ist nach Bestimmung der Dämpfung gegeben durch die Absorption an der Stelle des Maximums.

Die Absorption (oder die Dispersion) verdient bei solchen Untersuchungen der Dämpfung und der Teilchenzahl den Vorzug vor der Emission. Denn die Stärke der Emission wird, abgesehen von den genannten Bestimmungsstücken, noch durch die Stärke der Anregung usw. bestimmt. Ferner liegt die Komplikation vor, daß der die Emission anregende Vorgang in vielen Fällen gleichzeitig die schwingungsfähigen Teilchen erst schafft (z. B. bei den Nebenserien der Alkalien). Viel besser definierte Verhältnisse bietet also die Absorption.

Nun hat H. A. Lorentz[1]) den Versuch gemacht, die beobachtbare Dämpfung der Spektrallinien bei Gasen als eine nur scheinbare aufzufassen. Für die notwendig vorhandene wirkliche Dämpfung der Schwingungen durch Ausstrahlung ergibt nämlich die theoretische Berechnung einen so geringen Betrag, daß diese Dämpfung neben der aus der Breite der Linie experimentell bestimmbaren vernachlässigt werden kann. Lorentz betrachtet also die Teilchen als praktisch ungedämpft schwingend. Die Schwingung wird aber von Zeit zu Zeit durch eine plötzliche Störung abgeschnitten, wobei die Schwingungsenergie in Wärme umgesetzt wird. Diese Störung soll irgendwie mit den Molekularstößen zusammenhängen, und dem entspricht die längst bekannte Verbreiterung der Linien mit zunehmender Dichte[2]). Lorentz zeigt, daß solche regellose Störungen genau zu den nämlichen Erscheinungen führen, wie eine wirkliche Dämpfung der Schwingungen durch eine Art Reibungskraft.

Ich vermutete nun, da die Verbreiterung durch erhöhte Dichte mit den Molekülstößen in Zusammenhang gebracht ist, müßten die Linien eines Gases nicht nur durch Zusammenstöße der absorbierenden Moleküle mit Molekülen des nämlichen Gases, wie sie Lorentz allein betrachtet, sondern auch durch Zusammenstöße mit fremden Molekülen gestört werden. Ich suchte daher eine Verbreiterung von Absorptionslinien durch die Gegenwart eines fremden Gases nachzuweisen[1]).

Bei solchen Untersuchungen über Mischungen von Gasen empfiehlt sich erst recht die Wahl eines Stoffes, der das Absorptionsspektrum ohne elektrische oder chemische Erregung zeigt. Denn man weiß sonst nie, in welcher Weise sich der fremde Stoff beteiligt, ob seine Ionen oder seine neutralen Moleküle den fraglichen Einfluß auf die Linien des absorbierenden Stoffes ausüben usw. Als einfachstes Beispiel wählte ich daher die feinen Linien, aus denen sich die Absorptionsbanden von Brom- und Joddampf zusammensetzen.

Es galt nun, eine Methode zu finden, um diese Linien bei hoher Dispersion zu beobachten. Ich benutzte dazu ein Stufengitter, bestehend aus 16 Platten von 10 mm Höhe. Zur Untersuchung von Absorptionslinien hat man das Stufengitter bisher meines Wissens kaum verwendet. Da sich nämlich sonst die Spektren der verschiedenen Ordnungen über-

1) Über die Absorptions- und Emissionsbanden gasförmiger Körper, Verslag Academ. Amsterdam **14**, I, S. 518; II, S. 577, 1905/6.

2) Bei Berechnung einzelner Beispiele kommt Lorentz zu Zahlen, welche eine viel häufigere Störung der Moleküle anzeigen, als sie durch Zusammenstöße bei Berechnung nach der Gastheorie möglich ist. Indes scheint die Art der Berechnung gerade bei dem sichersten Beispiel nicht einwandfrei. Es wird dabei eine Messung der Absorption in Kohlensäurebanden verwendet, welche Angström mittelst der strahlenden Wärme ausführte. Als Breite wird nun die ganze Breite des Absorptionsgebietes zugrunde gelegt. Dies scheint bedenklich, weil diese ultraroten Gasbanden wohl aus unaufgelösten Linien bestehen. Nimmt man für die Breite dagegen ca. 10^4 mal so kleine Werte, wie sie im Sichtbaren nach meinen Beobachtungen als möglich erscheinen, so kommt man für die Zahl der Störungen zu Werten, die mit den gastheoretisch berechneten der Größenordnung nach verträglich scheinen. Weiteres Material hoffe ich durch Bestimmungen des Halbwertsintervalls und der Absorption mit dem Stufengitter zu erhalten.

1) Wood gibt an (diese Zeitschr. **7**, 874, 1906), daß beim Absorptionsspektrum des Natriums bei Gegenwart von Wasserstoff die Kannellierung sehr ausgeprägt sei, während in hohem Vakuum die Kannellierung vollständig verschwunden sei. Die Veränderung scheine in dem gesteigerten Absorptionsvermögen gewisser Linien und Liniengruppen zu beruhen. — In einer anderen Arbeit (Astrophys. J. **26**, 41, 1907) hat Wood eine Verbreiterung der Quecksilberbande 2536 durch neutrale Gase beschrieben, doch scheint diese Verbreiterung bei gleichem Druck von andrer Größenordnung zu sein wie die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Erscheinungen.

decken, braucht man für die Absorptionsuntersuchung eine kontinuierliche Lichtquelle, deren Spektralbereich höchstens gleich dem Abstand zweier Ordnungen des Stufengitters ist; d. h. in unserm Fall ca. 0,5 Angström-Einheiten. Man kann sich solches Licht durch spektrale Zerlegung verschaffen, und ich werde diesen Weg auch künftig zu quantitativen Zwecken (mittelst photographischer Photometrie) benutzen. Viel mehr Licht bekommt man aber, wenn man als kontinuierliche Lichtquelle von sehr schmalem Spektralbereich eine verbreiterte Spektrallinie wählt. Die Hochdruckquecksilberlampe von Heraeus erfüllte diesen Zweck sehr vollkommen. Nach längerem Brennen ist z. B. die grüne Quecksilberlinie samt ihren Trabanten hinreichend verbreitert, um als genügend kontinuierliche Lichtquelle zu gelten, deren Spektralbereich dennoch so klein ist, daß sich benachbarte Ordnungen im Stufengitter nicht erheblich überdecken. Untersucht werden dann diejenigen von den zahllosen, das betreffende Bandenspektrum bildenden Absorptionslinien, die zufällig in den Spektralbereich dieser Linie (oder einer der andern verbreiterten Quecksilberlinien) fallen.

Die Anordnung, die ich Ihnen hier vorführen möchte[1]), ist nun folgende: Der Quecksilberbogen L wird abgebildet mittelst der Linse M durch das Absorptionsgefäß (Rundkolben) A hindurch auf den Spalt S_1 eines Spektroskops mit konstanter Ablenkung, das dazu dient, die verschiedenen Quecksilberlinien zu trennen. Die gewünschte Quecksilberlinie wird auf den Spalt S_2 des zum Stufengitter gehörigen Kollimators abgebildet, dann kommt das Stufengitter G und das Fernrohr F.

Verwendet man z. B. Bromdampf von einigen Zentimetern Druck, so fällt am meisten eine Gruppe von 3 ziemlich scharfen Linien auf. Füllt man einen Kolben dagegen außer mit Brom noch mit Luft von Atmosphärendruck, so erhält man ganz verwaschene Linien. Ein nahezu gleiches Bild liefert CO_2 und N_2. Mit einem Zusatz von Wasserstoff von Atmosphärendruck werden die Linien gleichfalls verwaschen, aber das Aussehen der aus den 3 Linien entstehenden verwaschenen Bande ist ein ganz andres. *Es kommt also nicht nur auf den Druck, sondern auch auf die Natur des fremden Gases an, das die Verbreiterung bewirkt.*

Auch bei Jod zeigt der evakuierte Kolben schon bei Zimmertemperatur und viel besser bei dem immer noch geringen Dampfdruck, der einer Temperatur von etwa 40° entspricht, äußerst scharfe dunkle Linien, z. B. auf dem Grund der verbreiterten grünen Quecksilberlinie. Fassen wir speziell eine charakteristische Gruppe von 3 Linien (von einigen Hundertstel A.-E. gegenseitigem Abstand) ins Auge. Sie sind in dem ein fremdes Gas von Atmosphärendruck enthaltenden Kolben verbreitert, und zwar so stark, daß sie gerade zu einer verwaschenen Bande zusammengeflossen sind. Gleichzeitig sieht man sehr deutlich, wenn man die stärkste Linie ins Auge faßt, *daß dabei die Absorption an der Stelle größter Absorption zurückgeht.* Dies

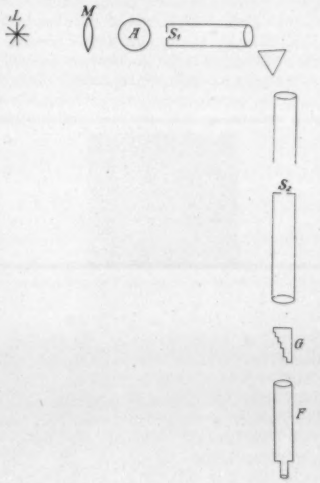


Fig. 1.

ist ja auch nach der Theorie zu erwarten, wenn die Zahl der Zentren ungeändert bleibt; in diesem Fall ist die Intensität an der stärksten Stelle umgekehrt proportional der Dämpfung. Auch der Unterschied im Verhalten von Wasserstoff und Luft ist wieder vorhanden. (Im einen Fall ist das entstandene breite Band viel dunkler und deutlicher, während der Hintergrund heller erscheint als im andern Fall; dagegen erscheint das Band in letzterem viel weniger dunkel. Natürlich kann aus dem Anblick nichts Spezielles geschlossen werden, sondern nur, daß verschiedene fremde Gase verschiedenen Einfluß haben; alles Speziellere muß der in Arbeit befindlichen photometrischen Untersuchung vorbehalten bleiben.)

1) Der Firma Carl Zeiß und insbesondere Herrn Dr. Löwe möchte ich für die große Liebenswürdigkeit, mit der sie mir durch Überlassung vieler Apparate usw. die Demonstration in Salzburg ermöglichten, auch hier meinen verbindlichsten Dank abstatten.

Durch die vorstehend mitgeteilten Versuche finden auch die merkwürdigen Resultate von Knut Angström eine einfache Erklärung. Angström[1]) zeigte, daß die Absorption ultraroter Strahlen durch Gase stark durch den Gesamtdruck beeinflußt wird. Die Absorption einer bestimmten Menge des absorbierenden Gases nimmt meist stark zu, wenn man durch Hinzufügen eines nicht absorbierenden Gases den Gesamtdruck erhöht[2]). Dieses Verhalten erklärt sich wohl aus der geringen Dispersion des zur bolometrischen Messung dienenden Apparates: die feinen Linien, aus denen auch diese Absorptionsbanden bestehen dürften, werden nicht getrennt.

Hat man nun sehr starke Absorption in diesen Linien, und die Linien werden dann durch ein nicht absorbierendes Gas verbreitert, so fällt die damit verbundene Abnahme der Maximalabsorption nicht ins Gewicht, wenn dieselbe immer noch sehr stark bleibt. Die Ausdehnung der einzelnen Absorptionslinien bedingt

Fig. 2.

dann, daß das Gas im ganzen in dem betreffenden Spektralgebiet undurchlässiger wird.

Nachtrag beim Druck. So einfach wie bei den Bandenlinien des Joddampfes, wo an der Stelle größter Absorption bei Zufügung fremden Gases die Absorption zurückgeht, wie es die Theorie verlangt für den Fall unveränderter Teilchenzahl, scheint die Sache bei Linien nicht immer zu liegen. Die Hauptserienlinien der Alkalien zeigten beim Zufügen von Stickstoff nicht nur eine starke Verbreiterung, sondern die Absorptionslinie scheint in ihrem Schwerpunkt stärker statt schwächer zu werden[3]). Die benutzte Anordnung war folgende: Evakuierte Glaskugeln wurden durch Destillation mit Natrium gefüllt und zugeschmolzen, nachdem in einigen Fällen noch andere Gase eingelassen waren. Das Licht einer Nernstlampe durchsetzte erst die im elektrischen Ofen liegende Glaskugel, dann ein Spektroskop zur Vorzerlegung, dann einen mit einem Rowland-

1) K. Angström, Arkiv för Mat., Astr. och Fysik **4**, Nr. 30, 1908.

2) Anm. beim Druck. Inzwischen ist dieses Verhalten von E. v. Bahr bei zahlreichen Gasen bestätigt worden. Ann. d. Phys. **29**, 780, 1909; — **33**, 585, 1910.

3) Vergl. auch eine Bemerkung von Fredenhagen, diese Zeitschr. **12**, 401, 1911.

schen Plangitter versehenen Spektrographen. Es wurde in 2. Ordnung photographiert. Die Vorzerlegung war nötig, weil sich die benachbarten Ordnungen schon überdeckten.

Ich reproduziere 2 Platten mit den D-Linien, bei verschiedenen Temperaturen aufgenommen. Die eine (19, Fig. 2) entspricht Natrium im Vakuum, die andere (18, Fig. 3) Natrium in Stickstoff. Obwohl die Linien ohne Stickstoff teilweise so schmal sind, daß die photometrische Ausmessung nicht in allen Fällen sicher ausführbar erschien, scheint doch die Absorption in der Mitte der Linie mit Stickstoff entschieden stärker als in der Mitte der viel schmäleren Linie ohne Stickstoff, die bei gleicher Temperatur aufgenommen ist und bei unveränderter Teilchenzahl die stärkere sein müßte. (Man vergleiche besonders die Aufnahmen bei 244°.) Das Gas vermehrt also die Teilchenzahl.

Die gleiche Verstärkung der Hauptserienlinien durch Stickstoff usw. zeigen auch Auf-

Fig. 3.

nahmen mit Kalium. Hier ist bei den tieferen Temperaturen die Linie 404 ohne Gas noch nicht erkennbar, während sie mit Gas schon sehr stark und breit ist.

Bestätigt sich diese Tatsache bei genauerer photographischer Photometrierung an Aufnahmen mit dem Stufengitter, so hat man hier den Fall, daß Zusammenstöße mit fremden Molekülen bei der Schaffung der schwingungsfähigen Teilchen eine wesentliche Rolle spielen können[1]). Letztere sind ja nicht mit den Dampfmolekülen und auch nicht mit den Ionen identisch. Über den näheren Mechanismus, ob z. B. die stoßenden Moleküle die nach W. Wiens Annahme zur Bildung der neutralen absorbierenden Teilchen nötige Aufnahme eines Elektrons durch das Ion bewirken, oder ob sie aus dem gewöhnlichen Molekül durch Zusammenstoß das schwingungfähige Teilchen entstehen lassen, läßt sich natürlich noch nichts ganz sicheres sagen. Nur so viel ist nach der von mir gelegentlich meiner Probevorlesung gegebenen und kurz darauf von Frank und Pringsheim[2]) unabhängig veröffentlichten Erklärung des Aus-

1) Die Beobachtungen mehrerer Forscher über das Leuchten der Kanalstrahlen im Zusammenhang mit dem Druck sind damit verträglich.

2) Verh. der Deutschen Phys. Ges., 1911.

bleibens der Hauptserien in den Alkali-Chlorflammen wahrscheinlich, daß elektronegative Gase durch ihre Verwandtschaft zum Elektron die Zahl der Teilchen herabsetzen. Dieses Verhalten folgt mit Notwendigkeit aus der Wienschen Hypothese. Als einfachste Annahme für die Bildung der schwingungsfähigen Teilchen erscheint also bei den Linien die folgende: Das Ion stößt mit neutralen Molekülen des nämlichen Stoffes oder eines fremden Gases zusammen. Das betreffende Molekül kann an das Ion ein Elektron abgeben und ergänzt es dadurch zum schwingungsfähigen neutralen Teilchen. So erklärt sich die Zunahme dieser Teilchen bei Zufügung eines fremden Gases z. B. zum Natriumdampf, ebenso das stärkere Leuchten der Kanalstrahlen beim Eintritt in einen Raum von höherem Druck. Elektronegative Gase sind zu dieser Abgabe eines Elektrons nicht geneigt, sondern ziehen vielmehr Elektronen an sich. So erklärt sich das Ausbleiben der Alkalilinien in der Chlorflamme. Natürlich muß der hypothetische Charakter dieser Annahme betont werden.

Zusammenfassung: Es wird eine Methode beschrieben, welche ziemlich feine Absorptionslinien bei so großer Dispersion zu untersuchen gestattet, daß quantitativen Messungen mittelst photographischer Photometrie nichts mehr im Wege steht. Es wird gezeigt, daß Absorptionslinien durch fremde, nichtabsorbierende Gase verbreitert und in ihrer Intensität verändert werden, wobei die einzelnen Zusatzgase einen verschiedenen Einfluß ausüben. Banden- und Serienlinien scheinen sich dabei verschieden zu verhalten. (Eingegangen 17. Juli 1911.)

Das Dopplersche Prinzip für bewegte Spiegel und ein Versuch von Klinkerfues.

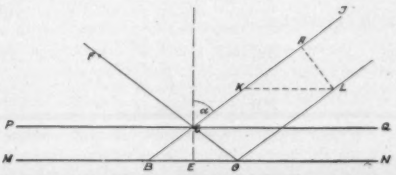
Von E. Budde.

Wenn man sich mit den optischen Beobachtungen, welche als empirische Grundlage des Relativitätsprinzips gelten, etwas näher beschäftigt, so bemerkt man bald, daß das Dopplersche Prinzip für sie wesentliche Bedeutung haben muß, insofern es für die Reflexion an bewegten Spiegeln zur Geltung kommt. Im folgenden wird daher zunächst das Dopplersche Prinzip behandelt, und das Ergebnis wird dann auf einen von Klinkerfues[1]) erdachten Versuch angewendet, der angestellt wurde, um zu prüfen, ob sich eine Bewegung der Erde im ruhenden Äther nachweisen läßt.

Es ergibt sich, daß der genannte Versuch keinen Aufschluß über diese Frage liefern kann. Da aber Klinkerfues selbst eine kleine Abweichung im Sinne seiner Theorie beobachtet zu haben glaubte, wird ein abgeändertes Experiment beschrieben, welches eine sehr einfache und scharfe Beobachtung gestattet; auch dieses liefert das von der Theorie vorausgesehene Ergebnis Null.

1) Klinkerfues, Gött. Nachr. 1870, S. 226.

§ 1. Dopplersches Prinzip und Spiegelung. Gegeben sei eine spiegelnde Fläche, deren Spur in der Einfallsebene zur Zeit Null die Lage MN hat, und ein Bündel von parallelen kohärenten Lichtstrahlen, welches unter dem Einfallswinkel α auf sie fällt. Man errichte auf derjenigen Seite der Ebene MN, welche den Lichtstrahlen zugewandt ist, eine Normale und nehme an, der Spiegel sei in gleichförmiger Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit v, und in einer Richtung, die mit dieser Normale den Winkel φ macht. Die Komponente der Bewegung des Spiegels, welche in die Richtung der Normale fällt, ist dann $v\cos\varphi$. Es seien IB und LG zwei von den eben erwähnten Lichtstrahlen, und AB stelle eine Wellenlänge dar. Zur Zeit Null langt das vordere Ende der Welle in B an. Während die Welle fortschreitet, bewegt sich die Fläche MN um ein Stück vorwärts, dessen in die Normale fallende Komponente EC sei, so daß der Spiegel, wenn das hintere Ende A der Welle bei ihm anlangt, die Lage PQ hat. Das hintere Ende braucht also, um auf den Spiegel zu treffen, nur die Strecke AC zurückzulegen, und wenn die Lichtgeschwindigkeit c ist, so legt es diese Strecke zurück in der Zeit $\frac{AC}{c}$. Der Strahl AC wird dann in die Richtung CF reflektiert; er ist aber dann nicht mehr die Fortsetzung des an B reflektierten Strahles, sondern er setzt, wenn $EG = BE$ gemacht wird, den Strahl GC fort, was angesichts der Kohärenz annehmbar ist. Zu der Zeit, wo das Ende A der erstbetrachteten Welle in C anlangt, befindet sich der Anfang der von L ausgegangenen Welle in einem Punkt F, und die Länge CF ist dann die Wellenlänge nach der Reflexion. Es handelt sich darum, sie auszumitteln.



Ist AL senkrecht zur Strahlrichtung, und LK parallel mit BG, so ist offenbar KA die

Längendifferenz, um welche der Strahl LGF von G aus dem Strahl AB voraneilt. Es ist

$$KL = BG = 2BE = 2EC \cdot \operatorname{tang}\alpha,$$

und

$$AK = KL \sin\alpha = 2EC \operatorname{tang}\alpha \sin\alpha. \quad (1)$$

Der Endpunkt A der erstbetrachteten Welle kommt in C an zur Zeit $\frac{AC}{c}$. In dieser Zeit hat der Spiegel einen Weg zurückgelegt, dessen Projektion auf die Normale ist

$$EC = AC\frac{v}{c}\cos\varphi.$$

Bezeichnet man die Wellenlänge AB mit l, so ist

$$AC = l - CB = l - \frac{EC}{\cos\alpha} = l - AC\frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha};$$

daraus

$$AC = \frac{l}{1 + \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}}$$

oder, wenn höhere Potenzen von $\frac{v}{c}$ vernachlässigt werden:

$$AC = l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right), \quad (2)$$

$$EC = l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos}{\cos\alpha}\right)\frac{v}{c}\cos\varphi. \quad (3)$$

Zur Zeit Null befand sich nun das vordere Ende derjenigen Welle, deren hinteres Ende in L lag, in einem Abstand von G, der nach (1) $2EC \operatorname{tang}\alpha \sin\alpha$ betrug, d. i.

$$2l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\frac{v}{c}\cos\varphi \operatorname{tang}\alpha \sin\alpha,$$

d. h. der Abstand des vorderen Endes von C betrug

$$2l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\frac{v}{c}\cos\varphi \operatorname{tang}\alpha \sin\alpha - GC$$

oder

$$2l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\frac{v}{c}\cos\varphi \operatorname{tang}\alpha \sin\alpha - \frac{EC}{\cos\alpha}$$

oder

$$2l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\frac{v}{c}\cos\varphi \operatorname{tang}\alpha \sin\alpha - l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha},$$

d. i.

$$l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\frac{v}{c}\cos\varphi\frac{-\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Hierzu kommt nun der Weg, den dieser Wellenanfang in der Richtung nach F zurücklegt, während das Wellenende A nach C gelangt. Derselbe ist gleich AC, also ist nach Gl. (2) die Wellenlänge nach der Reflexion, die wir mit λ bezeichnen wollen,

$$\lambda = l\left(1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\frac{-\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\right).$$

Das ist, wenn wieder die Größen höherer Ordnung vernachlässigt werden,

$$\lambda = l\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi\cos\alpha\right). \quad (4)$$

Damit ist die gesuchte Grundgleichung in erster Annäherung gefunden.

Sie ist aber cum grano salis zu verstehen. In ihr ist nämlich v die Relativgeschwindigkeit des Spiegels zu dem auf seiner Vorderseite befindlichen Äther. Bewegt sich der Spiegel im ruhenden Äther, so ist v seine Totalgeschwindigkeit. Befindet sich aber der Spiegel in einem Medium, welches den Äther nach Fresnel-Fizeau mitschleppt, und haben beide, Spiegel und Medium, eine Translationsgeschwindigkeit v, so ist die relative Geschwindigkeit des Spiegels gegen den Äther offenbar $v(1-\varepsilon)$, wenn ε den bekannten Fresnelschen Koeffizienten $\frac{n^2-1}{n^2}$ bezeichnet. Schreibt man dem Medium beliebige Grenzflächen zu, so würde es für die Erörterung der dann eintretenden Erscheinung erforderlich werden, die ganze Theorie der Brechung an bewegten Grenzflächen unter Berücksichtigung des Dopplerschen Prinzips und der Mitschleppung des Äthers wiederzugeben. Diese ist so verwickelt, daß sie einer besonderen Untersuchung vorbehalten bleiben soll. Hier möge nur der einfachste Fall, der gerade beim Klinkerfuesschen Versuch eine Rolle spielt, betrachtet werden. Die spiegelnde Fläche sei die Hypotenusenfläche eines rechtwinkeligen Prismas; die untersuchten Lichtstrahlen gehen unter rechtem Winkel (von Süden nach Norden) durch die eine Kathetenfläche und treten gleichfalls unter rechtem Winkel (in der Richtung nach Osten) durch die zweite Kathetenfläche aus. Die Bewegung des Prismas sei rein translatorisch und erfolge von Westen nach Osten. Dann trifft die Bewegung des Prismas den eintretenden Strahl unter rechtem Winkel; die durch sie herbeigeführte Änderung des Weges ist also von zweiter Ordnung in $\frac{v}{c}$, und bleibt außer Betracht. Die spiegelnde Fläche hat relativ zu dem im Glase enthaltenen Äther die Geschwindigkeit $v(1-\varepsilon)$; es ist $\cos\varphi\cos\alpha = \frac{1}{2}$; die von Westen nach Osten gehenden Strahlen haben also im Glase die Wellenlänge $l\left(1 - \frac{v(1-\varepsilon)}{c}\right)$. Die Stelle, an welcher sie aus der zweiten Kathetenfläche austreten, verhält sich wie ein selbstleuchtender Punkt, der

sich im Äther mit der Geschwindigkeit εv bewegt. Beim Austritt in den freien Äther wird also die Wellenlänge nochmals um $l\frac{\varepsilon v}{c}$ verkürzt, d. h. nach dem Austritt ist die Wellenlänge $l\left(1-\frac{v}{c}\right)$. Das spiegelnde Prisma verhält sich also genau so wie ein Metallspiegel. Dasselbe gilt offenbar für negative Werte von v.

Die Resultate dieses Paragraphen sind schon in dem „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" von H. A. Lorentz[1]) enthalten; sie sind aber dort aus bestimmten Annahmen über die Schwingungsart der Ionen begründet; es schien mir daher nicht ganz überflüssig, sie aus der einzigen Voraussetzung abzuleiten, daß bei Spiegeln, die so groß sind, daß ihre Randerscheinungen vernachlässigt werden können, das Huygenssche Prinzip durch Betrachtung von Strahlen ersetzt werden kann.

§ 2. Der Klinkerfuessche Versuch. Bei der Besprechung dieses Versuches muß man sich natürlich auf den Boden der Theorie des ruhenden Äthers stellen, was im folgenden geschieht. Das Experiment hat die beachtenswerte Eigenschaft, daß die Abweichung, welche sein Urheber vorausberechnet hat, in $\frac{v}{c}$ von erster Ordnung ist. Die vom Autor gegebene Beschreibung ist so knapp, daß man von seiner Versuchsanordnung keine ganz bestimmte Vorstellung erhält. Ich verstehe dieselbe wie folgt: Klinkerfues vernachlässigt die Schiefe der Ekliptik und nimmt an, ein Punkt der Erdoberfläche bewege sich des Mittags vermöge der Erdrevolution annähernd in der Richtung von Osten nach Westen, und um Mitternacht von Westen nach Osten. Als Lichtquelle benutzt er eine mit Sauerstoff gespeiste Petroleumlampe unter Zusatz von essigsaurem Natrium. Er läßt nun die Strahlen dieser Lampe in horizontaler Ebene von Süden nach Norden durch einen Spalt und ein geradsichtiges Prismensystem gehen, sie werden darauf, immer noch in horizontaler Ebene, mittels eines total reflektierenden rechtwinkligen Prismas nach Westen reflektiert und hier mit Hilfe eines Fernrohres beobachtet. Auf den Weg der Strahlen, zwischen Spiegel und Fernrohr, stellt nun der Verfasser ein Absorptionsgefäß mit Bromdämpfen und erwartet, daß die Absorptionslinien des Broms dem Dopplerschen Prinzip gemäß verschoben erscheinen sollen. Diese Verschiebung bestimmt er, indem er den Abstand einer Bromlinie von einer Natriumlinie mittels eines im Fernrohr angebrachten Mikrometers mißt, und zwar je einmal des Mittags und um Mitternacht. Es müßte sich dabei nach seiner Ansicht eine Differenz in der Stellung der Bromlinien ergeben, welche dem doppelten Betrage der Erdgeschwindigkeit entspräche. In Wirklichkeit will er eine Verschiebung gefunden haben, die ziemlich genau $^1/_5$ des erwarteten Betrages ausmachte.

Der Versuch enthält ein Element, welches der kritischen Betrachtung wert ist. Wir wollen uns dabei der Kürze wegen so ausdrücken, als ob der absorbierende Körper nur eine einzige Absorptionslinie besäße. Macht man die durchaus wahrscheinliche Annahme, die Bildung einer Absorptionslinie sei nur abhängig von der Anzahl der Lichtimpulse, welche das absorbierende Atom oder Molekül in der Zeiteinheit treffen, so folgt ohne weiteres, was Klinkerfues angenommen hat: die Absorptionslinie muß das Dopplersche Phänomen zeigen, und zwar sieht man sofort, daß man den Vorgang kurz, aber verständlich ausdrücken kann, indem man sagt: der absorbierende Körper nimmt die Farben mit der gleichen Verschiebung wahr, wie ein an seine Stelle gesetztes menschliches Auge.

Klinkerfues hat nun stillschweigend angenommen, daß die Lichtwellen, mit denen er arbeitet, nach der Reflexion am Spiegel dieselbe Länge haben, die sie im ruhenden Äther haben würden. Wäre das der Fall, so müßte sich in der Tat bei seinem Versuch die erwartete Wirkung zeigen. Das ist aber, wie sich aus § 1 ergibt, nicht der Fall. Auf der Strecke von der Lichtquelle zum Spiegel, wo die Strahlen senkrecht zur Erdbewegung stehen, haben sie bis auf Größen zweiter Ordnung dieselbe Wellenlänge wie im ruhenden Äther. Bei der Reflexion am Spiegel ist um Mittag $\cos\varphi = \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Nach der Reflexion besitzen sie also die Wellenlänge $l\left(1-\frac{v}{c}\right)$; durch das Zurückweichen der Bromdämpfe wird diese Änderung der Wellenlänge gerade ausgeglichen, also besteht zu Mittag keine Verschiebung der Bromlinie. Ganz Entsprechendes gilt für die Mitternachtszeit, wo $\cos\varphi = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Für den Klinkerfuesschen Versuch liefert also die Theorie das Ergebnis Null.

Es ist zunächst zu untersuchen, ob dieses Resultat für alle denkbaren Stellungen der Lichtquelle und des Spiegels gilt, oder ob sich solche Stellungen angeben lassen, für welche eine angebbare Verschiebung zu erwarten ist. Dabei

1) H. A. Lorentz, Leiden 1895 (Neudruck, Leipzig. 1906).

werde, wie oben, immer nur die erste Potenz von $\frac{v}{c}$ berücksichtigt.

Es sei an den bekannten Satz erinnert: bewegt sich ein leuchtender Punkt mit konstanter Geschwindigkeit v, und sendet er einen Strahl aus nach einer Richtung, die mit der Richtung der Bewegung den Winkel ϑ bildet, so hat eine Lichtwelle, die im ruhenden Äther die Wellenlänge l haben würde, in diesem Strahl die Länge $l\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)$.

Dies vorausgesetzt nehmen wir an, es sei ein leuchtender Punkt und ein Spiegel gegeben, und es haben beide im Äther eine gemeinschaftliche gleichförmige Translationsgeschwindigkeit. Wir nehmen einen Punkt des Spiegels zum Anfang eines rechtwinkligen Koordinatensystems, errichten in demselben eine Normale auf dem Spiegel nach derjenigen Hälfte des Raumes hin, in welcher sich der leuchtende Punkt befindet, und wählen diese Normale zur Achse der x. In diesem System habe der leuchtende Punkt die Koordinaten x, y, z, und das System Spiegel plus Punkt habe die konstanten Seitengeschwindigkeiten u, v, w. Von x, y, z aus lassen wir einen Strahl nach dem Koordinatenanfang gehen. Dieser hat die drei Richtungskosinus

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Für ihn ist also

$$\cos\vartheta=-\frac{ux+vy+wz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

Also wenn die Wellenlänge in diesem Strahl mit λ_1 bezeichnet wird, so ist

$$\lambda_1=l\left(1+\frac{v}{c}\,\frac{ux+vy+wz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right).$$

Ferner ist für unseren Fall

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

also wenn die Wellenlänge des Strahles nach der Reflexion mit λ_2 bezeichnet wird,

$$\lambda_2=\lambda_1\left(1-\frac{v}{c}\,\frac{2ux}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right)=$$

$$=l\left(1+\frac{v}{c}\,\frac{-ux+vy+wz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right).$$

Andererseits denken wir uns nun im Punkte o, o, o einen selbstleuchtenden Punkt angebracht und nehmen an, derselbe schicke einen Strahl in die gleiche Richtung, welche der soeben besprochene reflektierte Strahl hat. Dieser Strahl geht offenbar durch einen Punkt, dessen Koordinaten sind $x, -y, -z$, und wenn wir den Winkel, den dieser Strahl mit der Bewegung des Systems macht, mit ϑ_2 bezeichnen, so ist

$$\cos\vartheta_2=\frac{ux-vy-wz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}}.$$

Daraus ergibt sich für die Wellenlänge λ_3 des hier betrachteten Strahles

$$\lambda_3=l\left(1-\frac{v}{c}\,\frac{ux-vy-wz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right).$$

Der Wert von λ_3 stimmt, wie man sieht, mit dem von λ_2 völlig überein, d. h. für die Bestimmung der Wellenlänge eines reflektierten Strahles kann man den leuchtenden Punkt x, y, z ersetzen durch einen selbstleuchtenden Punkt, der an derjenigen Stelle des Spiegels angebracht ist, wo der Strahl reflektiert wird. Dieser Satz gilt auch für beliebige weitere Spiegelungen; denn für eine zweite Spiegelung kann nunmehr der Koordinatenanfang als Lichtquelle betrachtet werden, für eine dritte derjenige Punkt des zweiten Spiegels, in welchem der Lichtstrahl reflektiert wird usw. Das heißt: Wenn ein leuchtender Punkt und eine beliebige Anzahl von Spiegeln dieselbe gleichförmige Translationsbewegung im Äther haben, so hat irgendein von dem leuchtenden Punkt ausgehender Strahl nach Reflexion an sämtlichen Spiegeln dieselbe Wellenlänge, die ein Strahl haben würde, der vom selbstleuchtend gedachten Reflexionspunkt des letzten Spiegels ausgeht. Ist nun hinter dem letzten Spiegel ein menschliches Auge vorhanden, welches die gleiche Translationsbewegung mitmacht, so wird für die Wahrnehmung dieses Auges die Dopplersche Veränderung der Wellenlänge durch die Bewegung des Auges selbst ausgeglichen. Also: das für den speziellen Klinkerfuesschen Fall gefundene Resultat ist allgemeingültig; mittels gespiegelter Strahlen kann eine auf der Translation der Erde beruhende Verschiebung von Absorptionslinien nicht wahrgenommen werden.

§ 3. Kontrollversuch. Wie oben bemerkt, glaubte Klinkerfues eine Abweichung beobachtet zu haben, welche $^1/_5$ der von ihm berechneten Größe hatte. Es schien mir immerhin von Wert, diese Angabe experimentell zu kontrollieren. Zu diesem Zweck wurde ein Versuch angestellt, der erheblich bequemer und genauer auszuführen ist als der Klinkerfuessche. Man denke sich eine Lichtquelle, die ein Strahlenbündel von Süden nach Norden schickt; dieses Bündel werde durch einen unter 45^0 gemachten Spiegel nach Westen reflektiert und

dann durch ein Spektroskop beobachtet. Nun stelle man zwei Exemplare desselben Absorbens auf den Weg des Lichtes, das eine zwischen Lichtquelle und Spiegel, das andere zwischen Spiegel und Spektroskop, und denke sich, die spektroskopische Beobachtung werde ausgeführt zu einer Zeit, wo die Bewegung der Erde im Äther für den Ort der Beobachtung die Richtung von Osten nach Westen hat, bezw. man rechne mit der Ost-West-Komponente der gerade vorhandenen Bewegung. Wäre die Auffassung von Klinkerfues richtig, so müßten die Absorptionslinien offenbar verdoppelt erscheinen, und von den beiden Linien, welche eine im ruhenden Äther einfache Linie repräsentieren, müßte die eine im Laufe des Tages bezw. der Jahreszeiten durch die andere hindurchpendeln. Da ich selbst durch lange Krankheit verhindert war, hat Herr H. Kreusler die Güte gehabt, den Versuch für mich anzustellen. Als Lichtquelle diente der positive Krater eines elektrischen Lichtbogens, nachdem man sich überzeugt hatte, daß derselbe keine dunklen Natriumlinien enthielt, als Absorbens stark verdünnte Natriumdämpfe, die sehr scharfe Linien lieferten. Die Dispersion gestattete $^1/_{20}$ vom Abstande der beiden Natriumlinien zu bestimmen, das wäre rund $^1/_{20\,000}$ der Wellenlänge. Nach der Angabe von Klinkerfues hätte die Verschiebung bei ihm $^1/_{12\,600}$ der Wellenlänge betragen, hätte also hier sichtbar werden müssen. Die Beobachtungen wurden im Anfang Februar und im Anfang Mai dieses Jahres zu den verschiedensten Tageszeiten angestellt, und es konnte nie auch nur eine merkliche asymmetrische Verdickung der Linien wahrgenommen werden. Die von Klinkerfues als beobachtet angegebene Abweichung ist also wohl als Beobachtungsfehler anzusehen.

Der theoretische Inhalt des Vorstehenden ruht noch auf der stillschweigend gemachten Voraussetzung, daß das Reflexionsgesetz durch die Bewegung der Spiegel keine Störung erleidet, die von erster Ordnung in $\frac{v}{c}$ ist. Dieselbe ist wohl an sich als durchaus wahrscheinlich zu bezeichnen, und das Ergebnis des hier beschriebenen Versuches steht wenigstens nicht in Widerspruch mit ihr.

(Eingegangen 20. Juni 1911.)

PHYSIKALISCHE TECHNIK.

Einige neue Apparate der Cambridge Scientific Instrument Company.

Von F. Bock.

Auf der 6. Jahres-Ausstellung der Physical Society in London, die im Dezember vorigen Jahres stattfand, und von vielen Firmen reichlich beschickt war, waren u. a. auch die nachstehend beschriebenen Apparate und Instrumente der Cambridge Scientific Instrument Company ausgestellt.

Zunächst ein Apparat zum Aufzeichnen von Rekaleszenzkurven nach Brearley (Fig. 1). Dieses Instrument ist in erster Linie dazu bestimmt, mit einer Thermosäule und einem Spiegelgalvanometer die Rekaleszenzkurven von Stahl oder die Abkühlungskurven beliebiger Körper in sehr großem und genauem Maßstabe aufzuzeichnen und zwar nach rechtwinkligen Koordinaten, welche Zeit und Temperatur unmittelbar zueinander in Beziehung setzen. Die Galvanometerskala bildet einen Teil des Kurvenzeichners und ist gerade über einer Trommel angebracht, die mit einem Blatt Papier zum Aufzeichnen der Kurve bespannt ist. Die Trommel macht in 10 Minuten eine Umdrehung; sie wird durch einen von einer Uhr bewegten Elektromagneten angetrieben. Der Schreibstift, der jede Stunde zweimal auf die Trommel niedergedrückt wird, wird von einem Schlitten getragen, an dem außerdem ein Zeiger befestigt ist. Der Schlitten

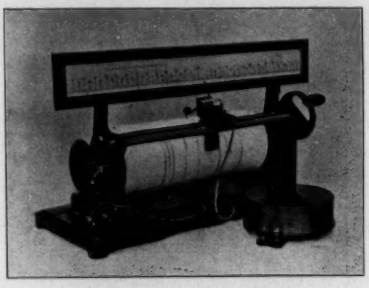


Fig. 1.

und mit ihm der Zeiger können mittels Schraubspindel und Handrad längs der Skala hin- und herbewegt werden. Beim Aufzeichnen einer Kurve hat der Beobachter nur das Handrad so zu drehen, daß er den Zeiger mit dem sich

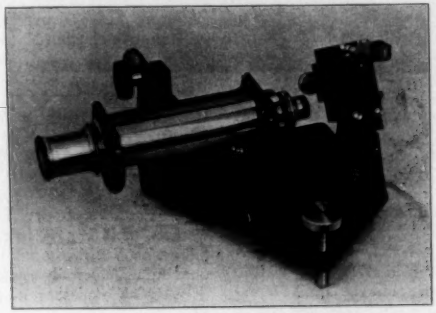


Fig. 2.

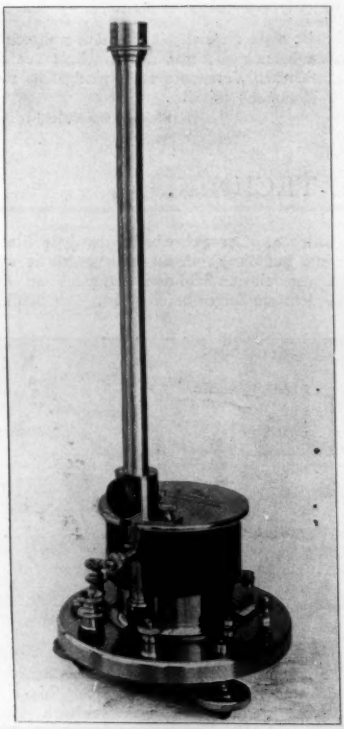


Fig. 3.

bewegenden Lichtfleck immer in Deckung hält. Die Schreibtrommel vermag Blätter von 360 mm Länge und 300 mm Breite aufzunehmen, und da diese Breite nur einigen hundert oder noch weniger Graden C zu entsprechen braucht, so ist es klar, daß die sich ergebende Kurve in sehr großem Maßstabe aufgezeichnet wird.

Ferner ist das in Fig. 2 aufgezeichnete Goldblättchen-Elektrometer erwähnenswert. Es wurde 1903 von C. T. R. Wilson eingeführt und besitzt geringe Kapazität und große Empfindlichkeit. Diese wird dadurch erreicht, daß man die Bedingungen, unter denen ein frei hängendes Goldblättchen aus seiner senkrechten Stellung herausgezogen wird, mittels einer geneigten, geladenen Platte in seiner Nähe verändern kann. Es ist möglich, vollständige Stabilität über den ganzen Weg des Goldblättchens zu erzielen oder Instabilität über einen Teil, und der Benutzer arbeitet so nahe, wie es tunlich ist, an dem Bereich, in welchem die Einstellung unbegrenzte Empfindlichkeit gibt. Das Blättchen ist in einem Metallgehäuse eingeschlossen und wird durch ein Mikroskop beobachtet, wobei die Platte auf einem konstanten Potential gehalten wird. In der Ausstellung wurde dieser Apparat zum Nachweis der Elektrisierung benutzt, die durch Verspritzen von Quecksilber eintrat.

Das Ayrton-Mather-Galvanometer, Fig. 3, gehörte ebenfalls zu den Ausstellungsobjekten. Es entsprach dem wohlbekannten Modell der Firma, bei dem die Spule gesondert in einem Aufhängerohr angebracht ist. Sie läßt sich infolgedessen leicht herausnehmen und nötigenfalls schnell gegen andere Spulen auswechseln. Das Instrument hat eine außerordentlich leichte und gedrungene Spule, so daß zur Erreichung einer angemessen langen Schwingungsdauer,

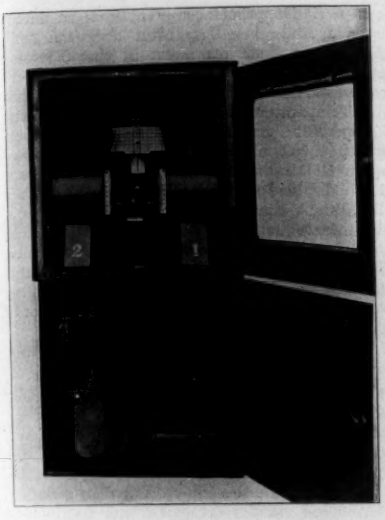


Fig. 4.

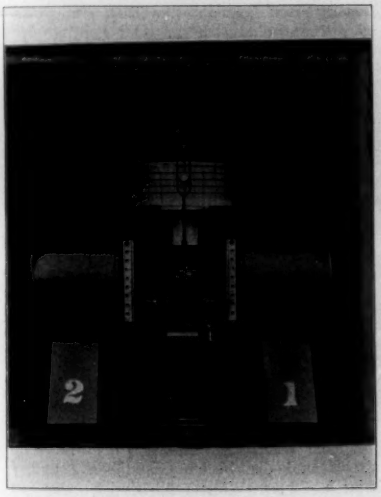


Fig. 4a.

der Aufhängestreifen bedeutend länger sein mußte, als gewöhnlich, nämlich 290 mm. Der Normalwiderstand des beweglichen Teils beträgt etwa 250 Ohm, die Dauer einer freien Schwingungsperiode ungefähr drei Sekunden. Die erreichbare Empfindlichkeit ist ungefähr 740 mm pro Mikroampere bei einem Skalenabstand von 1 m.

Einen Apparat zur fortlaufenden Aufzeichnung des Kohlensäuregehalts von Abgasen zeigt Fig. 4 und Fig. 4a. Der Apparat arbeitet nach einem sehr einfachen und praktischen Prinzip. Er enthält keine Absorptionsflüssigkeiten, da als Absorptionsmaterial nur trockener Kalk verwendet wird. Das Gas fließt in stetigem, fortlaufenden Strom durch den Apparat; infolgedessen sind keine Hähne oder Ventile notwendig. Den Hauptbestandteil des Instruments bilden zwei gewöhnliche Gasmesser. Die zu prüfenden Abgase werden zunächst durch einen dieser Gasmesser hindurchgesaugt und darauf durch das Absorptionsgefäß, in welchem sie von der

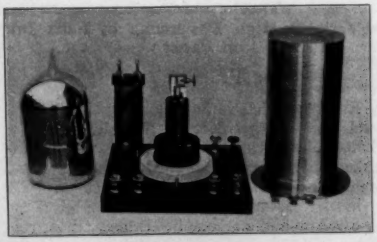


Fig. 5.

Kohlensäure befreit werden. Hiernach gehen sie durch den zweiten Gasmesser. Es ist klar, daß infolge der Absorption der Kohlensäure die durch den zweiten Messer gehende Gasmenge kleiner ist, als die durch den ersten gehende; die Differenz ergibt den absorbierten Kohlensäurebetrag. Die Gasmesser betätigen durch ein Differentialgetriebe einen Schreibstift und bewirken, daß dieser mit einer Geschwindigkeit nach oben geht, die von dem absorbierten Kohlensäuregehalt abhängig ist. Wenn ein bestimmtes Abgasvolumen den ersten Messer passiert hat, fällt die Feder in ihre Anfangsstellung, aus der sie zu einer neuen Aufzeichnung wieder emporbewegt wird. Der höchste Punkt, den der Schreibstift jedesmal erreicht, zeigt unmittelbar den den Heizgasen entzogenen Prozentsatz Kohlensäure an. Auf dem normalen Diagrammblatt kann Kohlensäuregehalt von 0—25 Proz. verzeichnet werden, und es reicht für 24 Stunden. Der Apparat läßt sich für 25 Analysen pro Stunde einstellen.

Unter den Instrumenten, die nicht so un-

mittelbar den Ingenieur angehen, wie die oben beschriebenen, ist ein selbstregistrierendes Krankenthermometer der thermoelektrischen Bauart besonders bemerkenswert. Es ist ein selbstregistrierendes Thermometer, das besonders für medizinische Untersuchungen ausgestaltet worden ist. Die benutzte Thermosäule besteht aus Kupfer und Konstantan. Sie ist mit einem sehr empfindlichen selbstregistrierenden Galvanometer verbunden, so daß man ein Diagramm der Temperatur des Patienten aufgezeichnet bekommt. Ein besonderes Merkmal des Instruments ist der Thermostat, der die sogenannte kalte Verbindung der Thermosäule auf konstanter Temperatur erhält. Er besteht aus einem wärmeisolierenden Gefäß nach Dewar, in dessen Innerem zwei Spulen und ein thermostatisches Relais befestigt sind. Letzteres (Fig. 5) besteht aus zwei Doppelmetallstreifen, die an ihrem unteren Ende befestigt, oben aber frei sind. Am oberen Ende des einen ist eine Schraube angebracht und so eingestellt, daß sie mit dem andern Streifen nur in Berührung kommt, wenn die Temperatur der Streifen die erforderliche Temperatur von beispielsweise 35° C. überschreitet. Wenn die Temperatur in dem Dewarschen Gefäß unter 35° C ist, kann ein Strom durch die beiden Heizspulen gehen, sobald aber die Temperatur 35° C erreicht, genügt die Relativbewegung zwischen den beiden Streifen, um eine Berührung der Schraube des einen Streifens mit dem andern herbeizuführen und dadurch eine der beiden Spulen kurz zu schließen. So wird innerhalb des Thermostats eine konstante Temperatur unterhalten.

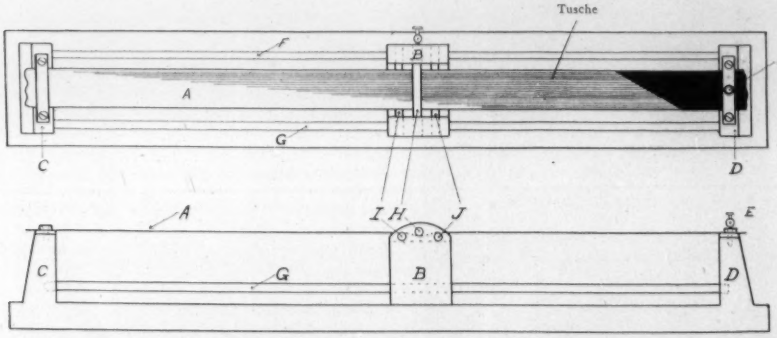
(Eingegangen 3. März 1911.)

Ein veränderlicher großer Widerstand aus Tusche auf Papier.
(A Variable High Resistance of India Ink on Paper.)

Von Franz A. Aust.

Einen einfachen veränderlichen großen Widerstand, der sehr geeignet ist für solche Zwecke, wie Regulierung der Spannung oder der Stromstärke einer Elektrisiermaschine, erhält man, wenn man Tusche auf Papier verwendet.

In der Gestalt, wie sie die Figur zeigt, ist ein Streifen aus starkem Zeichenpapier, A, von



3×45 cm zwischen zwei isolierenden Haltern, C und D, ausgestreckt. Die Tusche[1]) ist in Form von Strichen auf das Papier gebracht, die parallel zu dessen Länge verlaufen, und zwar sind diese Striche am einen Ende zahlreicher als am andern, so daß der Widerstand der Längeneinheit von einem Ende zum andern hin schnell abnimmt. Die Enden des Papieres werden zwischen Messingplatten gehalten, die an die Blockstützen C und D angeschraubt sind. Das Ende des Papiers mit dem geringen Widerstand, an das der Pol E mit dem hohen Potential angeschlossen ist, war gänzlich mit Tusche getränkt und noch feucht zwischen die Messingplatten geklemmt worden, um einen guten Kontakt zu sichern. Der Pol mit dem niedrigen Potential ist ein Gleitkontakt B, der sich auf den beiden Stäben F und G bewegt; dabei geht das Papier zwischen dem Messingstabe H und den beiden Glasstäben I und J hindurch. Der Widerstandsbereich war an obigem Streifen 0,01 Megohm bis 20000 Megohm, doch läßt sich die obere Grenze unschwer erhöhen.

1) Ich benutzte die wasserfeste Tusche von Higgins (Higgins' Waterproof Ink).

Man kann Tusche auch für angenäherte

Hilfsnormalien für große Widerstände verwenden. Schweres Zeichenpapier oder Isolierfaser, mehrfach mit flüssiger wasserfester Tusche getränkt, liefert in trocknem Zustande einen ziemlich konstanten Widerstand. Ein Papierstreifen von 2×10 cm mit fünf Überzügen von Tusche und noch in feuchtem Zustand an die Enden angeklemmten Kontaktstreifen aus Stanniol hat einen Widerstand von etwa einem Megohm. Die billigeren Sorten von Stangentusche sind auch verwendbar. Ein bestimmtes Stück von 1×1×5 cm mit Stanniolkontakten hatte einen Widerstand von ungefähr einem Megohm.

Die besseren Sorten von Stangentusche haben jedoch wegen ihrer metallischen Bestandteile einen sehr kleinen Widerstand.

Tusche eignet sich besonders zur Herstellung von Kohlenwiderständen, weil die besseren Sorten dieser Tuschen ein Gemisch aus mehreren Materialien sind, die, wie die Erfahrung gelehrt hat, am geeignetsten sind, um die Kohleteilchen zusammenzukleben und die Tusche haftend und unlöslich zu machen, Eigenschaften, die für einen guten Widerstand gleichfalls wesentlich sind.

Die Tragfähigkeit und der Temperaturkoeffizient werden durch die als Unterlage dienenden Materialien beeinflußt. Ein 2 cm breiter Papierstreifen, wie er oben beschrieben wurde, wird etwa 0,4 Milliampere aushalten, ehe er glüht; während ein ähnliches Stück Asbestpapier 40 bis 50 Milliampere ertragen wird, ohne eine dauernde Veränderung zu erfahren. Der Temperaturkoeffizient, der negativ war, bewegte sich bei den verschiedenen Widerständen von 1 bis 1,5 v. H. für 1 Zentigrad.

Es ist schwer, einen genügend kleinen Übergangswiderstand mit Tusche zu bekommen, um einen befriedigenden Widerstand von weniger als 0,1 Megohm herzustellen; aber für alle Rheostatenwiderstände oberhalb dieses Wertes, wie für Hilfsnormalien, hat sich Tusche als sehr nützlich erwiesen.

Physikalisches Laboratorium der Universität Minnesota, 28. April 1911.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 17. Mai 1911.)

Kleine Verbesserungen an Schieberwiderständen.

Von Wilhelm Volkmann.

Unter dem Namen Schülerwiderstände bringt die Elektrizitätsgesellschaft Gebr. Ruhstrat seit einiger Zeit Schieberwiderstände von 1,8 Ohm bis 12 000 Ohm zu dem erstaunlich billigen Preis von 1,60—2 M. in den Handel. Jeder dieser Widerstände kann etwa 30 Watt dauernd vertragen, reicht daher in vielen Fällen aus, wo man bisher viel teuere Widerstände benutzen mußte. Bei der Prüfung einiger Exemplare fand ich nun, daß ein recht empfindlicher Mangel vorhanden ist, der sich darin äußert, daß bei ungeeigneter Bewegung der Reguliervorrichtung der Strom zeitweise ganz aussetzt. Es gelang mir aber, diesen einzigen Nachteil durch Anbringung einer kleinen Feder zu beseitigen. Die Fabrikanten haben sich bereit erklärt, die Widerstände, sobald es gewünscht wird, mit dieser Verbesserung zu liefern.

Dieselbe Fabrik hat vor einiger Zeit Regulierwiderstände auf den Markt gebracht, die bei geringem Gewicht und niedrigem Preis eine sehr große Belastung vertragen. Sie bestehen aus langen Neusilberspiralen, die über aufgereihten Porzellanröllchen in zwei Wicklungen nebeneinander angeordnet sind. Ein über beide greifender Kontaktschieber stellt eine leitende Verbindung zwischen ihnen her. Der Strom wird in die eine Wicklung geleitet, tritt durch den Schieber in die andere und wird von ihrem Ende aus weiter geleitet, oder, man schaltet beide Wicklungen parallel und entnimmt den Strom, der ihren beiden Enden zugeführt ist, aus der Gleitstange des Schiebers. Dem Vorzug der Widerstände, daß sie bei 1—2 kg Gewicht 1—2 Kilowatt aufnehmen können, steht der Nachteil entgegen, daß die Regulierung ziemlich grob ist. Dem kann dadurch abgeholfen werden, daß man vor die eine der beiden Wicklungen einen der oben genannten Schülerwiderstände legt. Er tut seinen Dienst ebenso gut bei Hintereinanderschaltung wie bei Parallelschaltung der beiden Zweige. Die Ruhstratgesellschaft hat sich bereit erklärt, auf Wunsch den Spiralenschieberwiderständen einen passenden Schülerwiderstand gleich fest anzubauen.

Bei der Benutzung der Schieberwiderstände ist man nicht selten genötigt, eine als zweckmäßig ausprobierte Stellung des Schiebers mehrfach wieder herzustellen. Das tritt besonders bei Vorlesungsversuchen, oft aber auch bei Messungen ein. Muß man diese Stellung jedesmal unter Beobachtung der Meßinstrumente wieder finden, so verliert man viel Zeit und kann unter Umständen durch ein Versehen leicht Schaden anrichten. Um dem zu entgehen, tut man gut, durch ein auf die Führungsstange des Schiebers geklemmtes Hindernis seine Bewegung zu begrenzen. Die Elektrizitätsgesellschaft Gebr. Ruhstrat in Göttingen wird solche Begrenzungsklemmen nach meinem Vorschlag in den Handel bringen.

(Eingegangen 22. Mai 1911.)

Neue Klemmenformen.

Von Wilhelm Volkmann.

Die Stativteile, die ich vor 6 Jahren in der Schrift: „Der Aufbau physikalischer Apparate aus selbständigen Apparatenteilen" (Physikalischer Baukasten) beschrieb, haben neuerdings zum Teil erhebliche Verbesserungen erfahren aus Anlaß des Umstandes, daß auf meinen Wunsch fortan die Firma Leppin & Masche, Berlin, Engelufer 17, die Fabrikation dieser Stücke in wirklich präziser Ausführung übernommen hat. Da der Name „physikalischer Baukasten" häufig zu Mißdeutungen Anlaß gegeben hat, soll statt dessen künftig Präzisionsstativ gesagt werden.

Fig. 1.

Die Wand- und Tischklemme (Fig. 1) besteht aus einer in der Mitte durchbohrten dreieckigen Grundplatte, an einer Ecke mit Muffe, deren Bohrung so ausgearbeitet ist, wie es schon bei den Klemmfüßen (früher Rohrstative genannt) beschrieben wurde[1]). Zur Befestigung der Klemme an der Wand dient ein eingegipster Drahtdübel und eine in ihn passende Schraube. Am Tischrand macht man die Klemme mit einer gewöhnlichen Schraubzwinge fest, dabei ragt die Muffe derart über den Tischrand, daß die Stäbe nach unten hin lang vorstehen können. Setzt man auf so einen Stab mit Klemmkopf und Nippel eine Tischplatte, so hat man einen sehr brauchbaren Stelltisch. Die Klemme wird in zwei Größen, für Stäbe bis zu 13 und 20 mm Durchmesser angefertigt.

Fig. 2.

Die Parallel- oder Plattenklemme war in der früheren Gestalt nicht widerstandsfähig genug gegen Verbiegung, sie hat nun die in Fig. 2 abgebildete Form erhalten.

Die große Klemme von 60 mm Spannweite (Fig. 3) hat keinen Stiel, sondern eine Muffe,

Fig. 3.

mit der sie an einem beliebig langen Stabe befestigt werden kann, der nur die Dicke von 13 mm nicht überschreiten darf. Ihre Form ist so gewählt, daß die Achse drehrunder Gegenstände von der Verlängerung der Stabachse getroffen wird.

(Eingegangen 5. Mai 1911.)

1) Diese Zeitschr. 10, 646, 1909.

Zwei Ablesemikroskope.

Von Wilhelm Volkmann.

Bei physikalischen Messungen kommt es nicht selten vor, daß man die Bewegung eines unzugänglichen Apparatenteiles messend verfolgen oder eine Vorrichtung, die nicht bequem zugänglich, aber sichtbar ist, mehrfach an genau dieselbe Stelle rücken muß. Für solche Fälle habe ich mir ein Ablesefernrohr mit langem Auszug durch Einsetzen einer Glasteilung in die Okularblende so hergerichtet, daß jeder Teilstrich einem Fünftel Millimeter in der Objektebene entspricht. Seit ich dieses Instrument besitze, habe ich seinen Gebrauch in so vielen Fällen, bei denen man auch ohne dasselbe hätte auskommen können, bequem und vorteilhaft gefunden, daß es mir zweckmäßig schien, es in eine vielseitigere und handlichere Form zu bringen. Besonders war es wünschenswert, auch etwas stärkere Vergrößerungen zur Verfügung zu haben. So entstand das in Fig. 1 abgebildete Instrument, das in seiner Wirkung

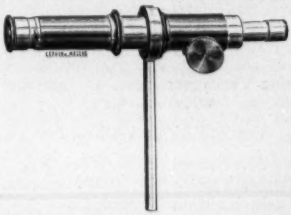


Fig. 1.

zwischen Fernrohr und Mikroskop steht. Ein Stiel, der an irgendeinem Stativ festgeklemmt werden kann, trägt eine Hülse mit Triebschraube, die den Tubus des Instruments aufnimmt. In diesem befindet sich einerseits ein Auszug, an den zwei achromatische Linsen verschiedener Brennweite einzeln oder übereinander angeschraubt werden können, und andrerseits ein Okular mit seitlich eingeschobenem Glasmikrometer, das 5 mm in 50 Teilen zeigt. Die Länge des Ablesemikroskops ist je nach der Stellung des Auszugs 19—25 cm. Über die Leistungen gibt die folgende Tabelle Auskunft:

	Objektabstand	1 mm des Objekts	Vergrößerung
Oberlinse	230—350 mm	3—6 Teile	5—10fach,
Unterlinse	80—100 „	9—14 „	14—22 „
Beide Linsen	50—55 „	17—25 „	27—40 „

Durch geeignete Stellung des Auszugs kann man die bequemen Vergrößerungen einstellen, bei denen 1 mm des Objekts genau 5, 10, 20 oder 25 Teile des Okularmikrometers deckt.

Fig. 2.

Für physikalische Übungen, insbesondere Schülerübungen, dürfte das beschriebene Instrument etwas zu teuer sein. Deshalb habe ich noch ein einfacheres Ablesemikroskop bauen lassen, das in Fig. 2 abgebildet ist. In der gestielten federnden Hülse liegt mit sanfter Reibung verschiebbar der Tubus des Mikroskops, dessen beide Objektivlinsen nicht achromatisch sind und verschiedene Brennweite haben. Sie können einzeln und gemeinsam verwendet werden. Um gute Bilder zu erhalten, mußte ihr Durchmesser ziemlich klein genommen werden, so daß die Bilder bei weitem nicht so hell werden wie bei dem anderen Instrument. Das Okular ist stramm in den Tubus eingepaßt, damit man es mehr oder weniger tief hineinschieben und dadurch die geeignete Vergrößerung innerhalb gewisser Grenzen auswählen kann. Auf die Okularblende ist eine Glasplatte gekittet, die etwas seitwärts von der Mitte eine Teilung in 20 Fünftel Millimeter enthält. Der Mittelstrich der Teilung ist über die Mitte des Gesichtsfeldes hinaus verlängert. An diesem Strich beobachtet man das Wandern objektiver Skalen, während man an der Skala das Wandern einer Objektmarke verfolgen kann. Die weite Teilung und die übersichtlich geringe Strichzahl ist mit Rücksicht darauf gewählt, daß das Instrument für Anfänger bestimmt ist. Die Leistungen des Mikroskops sind:

	Objektabstand	1 mm des Objekts	Vergrößerung
Oberlinse	53—61 mm	4—6 Teile	10—15fach,
Unterlinse	26—28 „	9—12 „	22—30 „
Beide Linsen	16—17 „	15—20 „	37—50 „

Je nach der Stellung des Okulars hat das Mikroskop 11—14,5 cm Länge. Es eignet sich zur Messung der elastischen Längenänderung und Durchbiegung, zur Beobachtung der Elektroskopblättchen, zur Messung von Drahtdicken und Kapillarendurchmessern usw. Auch wird es im Sinne von C. Reichel als Werkstattmikroskop, z. B. zum genauen Zentrieren auf der Drehbank, gut geeignet sein.

Beide Ablesemikroskope werden von der Firma Leppin & Masche, Berlin SO. 16, Engelufer 17, angefertigt.

(Eingegangen 19. Mai 1911.)

BESPRECHUNGEN.

M. Rózsa, Neuere Daten zur Kenntnis der warmen Salzseen. (Bericht über d. physikalische und chemische Untersuchung des Erwärmungsprozesses der Siebenbürger Salzseen.) gr. 8. 32 S. m. Abbildgn. Berlin, R. Friedländer & Sohn. 1911. M. 2.—

Verf. studierte 1910 den Bären- oder Illyés-See, der im Komitate Maros-Torda in einer Höhe von 502 m über dem Meere liegt, ein Areal von 42000 m² und eine maximale Tiefe von 20 m hat und wie die andern dortigen oberirdischen und unterirdischen Seen durch natürliche Auslaugung von Salzschichten entstanden ist. Er untersuchte zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Tiefen Temperatur, Dichte und Konzentration des Wassers an *NaCl*, welches über 99 Proz. aller gelösten Salze ausmacht; z. B. 6. Juli: die Konzentration stieg von der Oberfläche bis zu 10 m Tiefe von 7,5 bis auf 27 Proz. Die Dichte stieg mit der Tiefe kontinuierlich von 1,052 bis 1,205. Die Temperatur war an der Oberfläche 22,5°, stieg bis 2 m Tiefe bis auf 51,8° und fiel bis auf 20,1° in 18 m Tiefe. Vor 10 Jahren war das Wärmemaximum im Sommer = 71°, im Winter unter dem Eise = 32°. G. Ziegler und A. Kalecsinszky erkannten schon 1898 bzw. 1904, daß die eigentümlichen Temperaturverhältnisse jener Seen durch die strahlende Sonnenwärme veranlaßt sind; letzterer

bemerkte, daß die durch Bäche der Oberfläche zugeführte Süßwasserschicht isolierend wirke und daß infolge der trotz der steigenden Temperatur mit der Tiefe zunehmenden Dichte die natürliche Rührung und daher auch der Temperaturausgleich sehr verlangsamt sei. Rósza zeigt, z. T. durch Beobachtungen an den ungarischen Seen, z. T. durch Versuche an kleinen Lösungsmengen, daß in derartig nach der Dichte geschichteten Flüssigkeiten sowohl die Erwärmung des Innern durch Strahlung als auch die Abkühlung der Oberfläche durch Verdunstung, durch Abkühlungen der Luft und durch Wärmeabfuhr bewegter Luft sich langsamer verbreitet als in homogener Flüssigkeit, wo zu den langsamen Diffusionsströmen die schnellen konvektiven Wärmeströme (also Konzentrationsströme! Ref.) kommen, die durch Erwärmung der unteren und Abkühlung der oberen Schichten erzeugt werden. Das Niveau des Temperaturmaximums (Ref.: man sollte nicht „Wärmemaximum" sagen, wie der Verf.), das naturgemäß in der wolkenarmen Zeit, April—Juni, am größten ist, verschiebt sich durch Kahnfahren, Baden, Regengüsse, salzige Zuflüsse, Auflösung von Salzkrusten am Rande des Sees und kalte Salzquellen am Grunde des Sees, der einen Abfluß nach dem Magyaróser See hat. Die schwarze Schlammschicht am Grunde des Sees wirkt isolierend nach unten und absorbierend auf den bis auf den Grund gelangenden Teil der Sonnenstrahlung, da längere Wellen besonders stark vom Salzwasser absorbiert werden (hauptsächlich $\lambda = 3\ \mu$, $5\ \mu$, $7\ \mu$ und $9—20\ \mu$); für Wellenlängen von $658\ \mu\mu$ bis $494\ \mu\mu$ verkleinert sich der Absorptionskoeffizient des Wassers mit abnehmender Wellenlänge von 0,320 auf 0,002. Die schwarze Farbe rührt von kolloidem FeS her, das sich aus Fe-Verbindungen des Bodens und der Pflanzenreste und den gelösten Alkalisulfaten bildet, indem die letzteren durch verwesende Pflanzen reduziert werden; bei der Oxydation der Zellulose entsteht auch CO_2, welches folgende Reaktion bewirkt,

$$FeS + CO_2 + H_2O = FeCO_3 + H_2S.$$

Das Eisensulfid, welches dem Wasser oft grünliche Färbung verleiht (z. B. Grüner See), bildet sich so langsam, daß seine Bildungswärme für die Seetemperaturen nicht in Frage kommt.

Verf. bestimmte auch Lösungswärmen von $NaCl$ in H_2O.

1 Mol $NaCl$ sich lösend in 10 Mol H_2O verbraucht 4,7 cal

„	„	„	„	„	„	20	„	„	„	9,6 „
„	„	„	„	„	„	100	„	„	„	16,8 „
„	„	„	„	„	„	200	„	„	„	25,2 „

Kalecsinszky meinte, die Temperatur des Sees sei dort am höchsten, wo die Dichte und die Konzentration am größten seien, weil die spezifische Wärme pro 1 g, der $NaCl$-Lösungen von 18° von 1 auf 0,792 fällt, wenn die Konzentration von 0 auf 24 Proz. steigt; man hat aber die spezifischen Wärmen der Volumeinheiten, nicht der Gewichtseinheiten, zu vergleichen, und diese sind für die Konzentrationen 0 und 24 Proz. = 0,998 und 0,938, also nicht so sehr verschieden. Vor allem aber nimmt mit der Tiefe die Intensität der erwärmenden Strahlung sehr ab (Anm. des Ref.: die Strahlungsintensität ist für die verschiedenen Niveaus eine Exponentialfunktion von deren Tiefe), daher fällt das Temperaturmaximum nicht mit dem Maximum der spezifischen Wärme zusammen. Die Tatsache, daß sich bestimmte tiefere Schichten so viel mehr erwärmen konnten, als andere, zeigt, daß die Bewegung des Lösungsmittels durch das Gelöste stark beschränkt wird, wobei wohl Affinitäten verschiedener Molekeln eine Rolle spielen. Löst man etwas B in A und fügt, ohne daß Inhomogenität eintritt, etwas C hinzu, das in B nicht, wohl aber in A merklich löslich ist, so steigt der Gefrierpunkt der A-B-Mischung (z. B. Wasser in Benzol-Alkohol-Gemisch u. a.); wahrscheinlich bilden sich Molekülverbindungen von B und C, und zwar verschiedene bei verschiedenen Konzentrationen.

Die Paragenesen und die Mengenverhältnisse der Zechsteinsalze stimmen mit van't Hoffs Resultaten in mannigfacher Hinsicht dann besser überein, wenn man eine höhere Bildungstemperatur als die mutmaßliche damalige Lufttemperatur annimmt. Das Studium der ungarischen warmen Salzseen (Bärensee, Grüner See, Roter See u. a.) zeigt die Möglichkeit solch hoher Temperaturen (> 60°) der Zechstein-Salzseen und läßt vermuten, daß die Annahme von verschieden konzentrierten Wasserschichten und von Diffusionsströmen die van't Hoffschen Resultate noch besser mit dem petrographischen Befund in Einklang bringen wird.

Johnsen.

Tagesereignisse.

In der **Technischen Hochschule Hannover** wurden am 17. August cr. der physikalische Hörsaal und das physikalische Laboratorium durch ein Schadenfeuer zerstört.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. Herzog für Biochemie.

Verliehen: Den Privatdozenten der Chemie an der Universität Breslau Dr. Otto Sackur und Dr. Julius Mayer und dem Privatdozenten der Geophysik und angewandten Geologie Dr. Georg von dem Borne ebenda, dem Privatdozenten für Physik an der Universität Tübingen Dr. Hans Happel der Titel Professor.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Herbert Freundlich zum a. o. Professor für physikalische und anorganische Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig, Professor Dr. Hans Bucherer vom Reformgymnasium in Biebrich, leitender Chemiker der Farbenfabrik Kalle & Co. daselbst, zum ord. Professor der Farbenchemie an der Technischen Hochschule Dresden, der Kapitän z. S. Behm zum Direktor der Deutschen Seewarte Hamburg, der Oberingenieur der Siemens Brothers Dynamo Works in Stafford Dr.-Ing. Max Kloß zum ord. Professor für Elektromaschinenbau an der Technischen Hochschule Berlin, Dr. H. Krapf zum Dozenten für Chemie an der Deutschen Medizinschule in Schanghai, der Privatdozent Professor Dr. Wallenberg an der Technischen Hochschule Berlin zum Professor der Mathematik daselbst.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Wien Dr. Franz Mertens, der Professor für Chemie und Biologie an der Furman University Greenville Dr. W. F. Watson.

Gestorben: Der ord. Professor der Physik an der Ohio State University in Athens Dr. Benjamin Franklin Thomas, der Chemiker Dr. Louis Casimir de Coppet in Nizza, der ord. Professor der Chemie an der Universität Breslau Geheimrat Dr. Albert Ladenburg, der Professor der Chemie am Polytechnikum zu Riga Dr. Karl A. Bischoff.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.